中国科学院大学 2014 秋季学期微积分 I-A01

课程教师：袁亚湘　　助教：刘歆

2015 年 1 月 20 日，8:30-11:30

考题 1. (5 分) 利用 $\epsilon-\delta$ 语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2015\times 2^n+n^2+20\times\sin(n)}{n!}=0$.

解答 1. 对于任意 $\epsilon>0$, 存在 $N=\left[\frac{8081}{\epsilon}+3\right]$, 对任意 $n>N$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{2015\times 2^n+n^2+20\times\sin(n)}{n!} &< \frac{2015\times 2^2}{n\times 1}+\frac{n}{(n-2)(n-1)}+\frac{20}{n} \\ < \quad \frac{8080}{n}+\frac{1}{n-3} &< \frac{8081}{n-3}<\epsilon. \end{aligned}$$

证毕.

考题 2. (10 分) 求极限:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2015}}{e^x}\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0^+}x^{x^x-1}.$$

解答 2. a) 先考虑 $b_n=\frac{n^{2015}}{e^n}$ 的收敛性. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n/b_{n-1}|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2015}\right|=\frac{1}{e}<1$, 因此对于 $1/\alpha<q<1$, 存在 $N>0$, 使得 $\frac{b_n}{b_{n-1}}\le q$, 对任何 $n>N$ 成立. 也即 $0<b_n\le b_Nq^{n-N}$ 对任意 $n>N$ 成立, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_Nq^{n-N}=0$, 由两边夹定理, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 然后

$$0\le\frac{x^{2015}}{e^x}\le\frac{([x]+1)^{2015}}{e^{[x]}}=a\cdot\frac{([x]+1)^{2015}}{e^{[x]+1}}.$$

再次利用两边夹定理, 我们有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2015}}{e^x}=0$.

b) 首先 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}-x=0$. 又有 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x}{1}=1$. 因此, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\ln x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=1$. 进一步,

$$\lim_{x\to0^+}x\ln^2x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-2x\ln x=0.$$

故而

$$\lim_{x\to0^+}(e^{x\ln x}-1)\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}x\ln^2x=1\cdot0=0.$$

最后我们可得 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{x^x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{(x^x-1)\ln x}=e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}=e^0=1$.

考题 3. (10 分) 设连续函数 $f(x)$ 满足

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |f(x+y)-f(x)-f(y)| < \infty,$$

而且 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 2015$. 请证明: $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-2015x| < \infty$.

解答 3. 根据函数的特性, 存在 $B>0$ 使得, $|f(x+y)-f(x)-f(y)|<B$, 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立.

接着用数学归纳法证明: $|f(kn)-kf(n)| \le (k-1)B$ 对任意 $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$ 和 $n\in N$ 成立. 首先 $k=2$ 时根据特性直接成立, 对于 $k>2$, 我们有

$$|f(kn)-kf(n)| \le |f(kn)-f((k-1)n)-f(n)| + |f((k-1)n)-(k-1)n| \le B+(k-2)B = (k-1)B.$$

进一步

$$\left|\frac{f(kn)}{k} - f(n)\right| < B.$$

对于任意自然数 n, 由于

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(kn)}{kn} = 2015,$$

我们知道存在 K_n, 使得对任意 $k>K_n$ 有

$$\left|\frac{f(kn)}{kn} - 2015\right| \le \frac{1}{n},$$

也即

$$\left|\frac{f(kn)}{k} - 2015n\right| \le 1.$$

因此

$$|f(n)-2015n| \le \left|f(n) - \frac{f(kn)}{k}\right| + \left|\frac{f(kn)}{k} - 2015n\right| \le B+1.$$

另一方面, 根据函数的连续性, 我们知道存在 $\delta>0$ 使得, $|f(x)-2015x|<\delta$, 对任意 $x\in[0,1]$ 成立.

对任意 $x\in R^+\cup\{0\}$, 存在分解 $x=m+\xi$, 其中 $m\in\mathbb{N}$, $\xi\in[0,1)$. 于是

$$\begin{aligned}
& |f(x)-2015x| = |f(m+\xi)-f(m)-f(\xi)+f(m)-2015m+f(\xi)-2015\xi| \\
\le\ & |f(m+\xi)-f(m)-f(\xi)| + |f(m)-2015m| + |f(\xi)-2015\xi| \\
\le\ & B+B+1+\delta = 2B+\delta+1.
\end{aligned}$$

对任意 $x\in R^-$, 存在分解 $\xi=x+m$, 其中 $m\in\mathbb{N}$, $\xi\in[0,1)$. 于是

$$\begin{aligned}
& |f(x)-2015x| = |f(x)+f(m)-f(\xi)-f(m)+2015m+f(\xi)-2015\xi| \\
\le\ & |f(m+x)-f(m)-f(x)| + |f(m)-2015m| + |f(\xi)-2015\xi| \\
\le\ & B+B+1+\delta = 2B+\delta+1.
\end{aligned}$$

综上所述, $|f(x)-2015x|$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有界, 证毕.

考题 4. (10 分) 在 $[0,1]$ 上构造一个实值函数 $f(x)$, 使得它在 $[0,1]$ 内单调, 在所有的有理点上都不连续而且满足 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$.

解答 4. 首先 $[0,1]$ 内的有理数由于是可数集, 可以做如下排序: $q_1, q_2, q_3, \cdots$. 另一方面我们定义 $f(q_i)=\frac{1}{2^{i+1}}$, $i=1,2,\cdots$. 我们构造如下函数 $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{如果} x=0; \\ \frac{1}{2}+\sum\limits_{i\in\Omega_x} f(q_i), & \text{如果} x\in(0,1], \end{cases}$ 其中

$$\Omega_x := \{i \mid q_i \le x\}.$$

容易验证 $f(0)=0$, $f(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(q_i)=1$, $f(x)$ 单调并且在所有有理点 q_j 都有长度至少为 $\frac{1}{2^{j+1}}$ 的跳跃间断点.

考题 5. (10 分) 函数 $f(x)$ 的泰勒公式 (拉格朗日余项) 为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

ξ_n 介于 x_0 和 x 之间. 如果 $f^{(n+2)}(x_0)\neq 0$, 请证 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\xi_n-x_0}{x-x_0}=\frac{1}{n+2}$.

解答 5. 记 $\theta=\frac{\xi_n-x_0}{x-x_0}$, 联立展开到 $n+1$ 阶的泰勒公式 (拉格朗日余项) 和 $n+2$ 阶的泰勒公式 (皮亚诺余项), 可以得到

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}+o((x-x_0)^{n+2})$$

上式两边同时乘以 $(n+1)!/(x-x_0)^{n+2}$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{x-x_0}-\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{n+2}+o((x-x_0)) \\ \theta\cdot\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))-f^{(n+1)}(x_0)}{\theta(x-x_0)} &= \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{n+2}+o((x-x_0)), \end{aligned}$$

两边同时取极限 $x\to x_0$ 可得: $f^{(n+2)}(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\theta=\frac{f^{(n+2)}(x_0)}{n+2}$, 也即 $\lim\limits_{x\to x_0}\theta=\frac{1}{n+2}$. 证毕.

考题 6. (15 分) 计算不定积分:

$$\text{a)}\ \int e^{-2x}\sin(5x)dx; \qquad \text{b)}\ \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx; \qquad \text{c)}\ \int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}dx.$$

解答 6. a) 记 $I=\int e^{-2x}\sin(5x)dx$, 于是

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}\int \sin(5x)de^{-2x} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(5x)+\frac{1}{2}\int e^{-2x}d\sin(5x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(5x)+\frac{5}{2}\int e^{-2x}\cos(5x)dx\\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(5x)-\frac{5}{4}\int \cos(5x)de^{-2x}\\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(5x)-\frac{5}{4}e^{-2x}\cos(5x)+\frac{5}{4}\int e^{-2x}d\cos(5x)\\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(5x)-\frac{5}{4}e^{-2x}\cos(5x)-\frac{25}{4}I.
\end{aligned}
$$

因此 $I=-\frac{2}{29}e^{-2x}\sin(5x)-\frac{5}{29}e^{-2x}\cos(5x)+C$.

b)

$$
\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx=\int\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^4(x)}d\sin(x)=-\frac{1}{3\sin^3(x)}+\frac{1}{\sin(x)}+C.
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}&=\frac{2(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}\\
&= \frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\int\frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}dx=\ln|x^2-1|+\arctan(x+1)+C.
$$

考题 7. (15 分) 计算黎曼积分:

$$
\text{a)}\quad \int_1^{\pi+1}\sin^2(x)dx;\qquad \text{b)}\quad \int_0^1(1-x^2)^{2015};\qquad \text{c)}\quad \int_0^{\pi/2}\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)dx.
$$

解答 7. a)

$$
\begin{aligned}
&\int_1^{\pi+1}\sin^2(x)dx=\int_1^{\pi+1}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\int_1^{\pi+1}\frac{1}{2}dx-\frac{1}{4}\int_1^{\pi+1}\cos(2x)d(2x)\\
&= \frac{1}{2}\Big|_1^{\pi+1}-\frac{1}{4}\sin(2x)\Big|_1^{\pi+1}=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

b) 首先

$$
\int_0^1(1-x^2)^{2015}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(x))^{2015}d\sin(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4031}xdx.
$$

另一方面, 记 $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n xdx$, 我们有

$$
\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}xd\sin x\\
&= \cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^{n-2}xdx\\
&= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.
\end{aligned}
$$

所以 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 因为 $I_1=1$, $I_0=\frac{\pi}{2}$, 我们有 $I_n=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n=2k;\\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} & n=2k+1.\end{cases}$ 所以

$$\int_0^1(1-x^2)^{2015}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4031}xdx=\frac{4030!!}{4031!!}.$$

c)

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)dx\\ &= \int_0^{\pi/2}\sin(x)\cdot\frac{\cos(5x)-\cos(x)}{2}dx\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2x)}{4}-\frac{\sin(6x)-\sin(4x)}{4}dx\\ &= -\frac{\cos(2x)}{8}\bigg|_0^{\pi/2}-\frac{\cos(4x)}{16}\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{\cos(6x)}{24}\bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

考题 8. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可微而且 $f(a)=0$. 证明不等式 $M^2\le(b-a)\int_a^b(f'(x))^2dx$, 其中 $M=\sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$.

解答 8. 首先证明 Hölder 不等式对任意闭区间 $[a,b]$ 内的平方可积函数 $f(x)$, $g(x)$ 成立, 即: $f^2,g^2\in\mathcal{R}[a,b]$.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$$

如果 f,g 都在 $[a,b]$ 内恒等于 0, 结论显然成立. 否则不妨假设 g 不恒等于 0, 于是 $\int_a^b g^2(x)dx>0$. 对于任意给定的 λ, 显然 $f(x)-\lambda g(x)$ 也平方可积, 因此

$$0\ \le\ \int_a^b(f(x)-\lambda g(x)^2dx=\int_a^b f^2(x)dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx,$$

将 $\lambda=\int_a^b f(x)g(x)dx/\int_a^b g^2(x)dx$ 代入上式, 立即得证.

对任意 $x\in[a,b]$, 我们有

$$|f(x)-f(a)|=\left|\int_a^x f'(t)dt\right|\le\sqrt{\int_a^x(f'(t))^2dt}\cdot\sqrt{\int_a^x 1^2dt}=\sqrt{\int_a^x(f'(t))^2dt}\sqrt{x-a}. \tag{1}$$

其中小于等于利用到了 Hölder 不等式. 根据 $f(x)$ 的连续性, 必存在 x^* 使得 $f(x^*)=M$, 将之代入(1)可得 $M\le\sqrt{(x^*-a)\cdot\int_a^x(f'(y))^2dy}\le\sqrt{(b-a)\int_a^b(f'(y))^2dy}$, 两边取平方, 证毕.

考题 9. (10 分) 令 $A_n=\sum_{k=1}^n\ln(k+1)$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A_n}$ 发散.

解答 9. $A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(k+1) < n\ln(n+1) < (n+1)\ln(n+1)$, 因此 $\frac{1}{A_n} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. 另一方面 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 与 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)} dx = \ln(\ln(x))|_2^{+\infty}$ 同时收敛或发散, 后者显然发散, 因此前者发散, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n}$ 发散.

考题 10. (5 分) 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^{\ln(x)})x} dx$.

解答 10. 首先

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^{\ln(x)})x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+e^{(\ln(x))^2}} d\ln(x).$$

做变量代换 $y = \ln x$, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^{\ln(x)})x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{1+e^{y^2}} dy.$$

另一方面, $\frac{y}{1+e^{y^2}}$ 是奇函数, 并且 $\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+e^{y^2}} dy$ 存在, 因此 $\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+e^{y^2}} dy = -\int_{-\infty}^{0} \frac{y}{1+e^{y^2}} dy$, 进而 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^{\ln(x)})x} dx = 0$.