Stokes 方程非协调混合元的特征值下界

林群[1*], 谢和虎 [1], 罗福生 [1], 李瑜 [1], 杨一都 [2]

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190)
(2. 贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵阳 550001)

摘 要 通过利用 Crouzeix-Raviart 元 ($\{1,x,y\}$), 旋转元 ($\{1,x,y,x^2-y^2\}$), 拓广旋转元 ($\{1,x,y,x^2,y^2\}$) 以及拓广 Crouzeix-Raviart 元 ($\{1,x,y,x^2+y^2\}$) 这四种混合有限元 (参看正文中示图) 来提供求 Stokes 特征值下界的方法. 并找到恰当的理论框架, 重要的是证明不仅统一, 而且出奇的短, 仅需几行. 最后给出相关的数值结果来验证本文的理论分析.

关键词 Stokes 特征值, 下界逼近, 非协调混合有限元

1 特征值下界研究回顾

1965 年冯康 [1] 在他的有限元开篇中, 引用 Pólya 对 Laplace 特征值求上界时采用了双线性有限元方法. 有了冯康基于变分原理的有限元理论, 所有协调元的特征值都是上界. 见 [2–4] 的专著. 所以问题在于求下界有什么方法. 意外的是, 胡俊 - 黄云清 - 申红梅 [5] 采用了双线性元加质量集中的方法, 把 Pólya 的上界变成了下界. 更一般的问题：非协调元能否提供特征值的下界呢? [6] 对板问题 (四阶) 有了数值结果, 说明 Morley 元提供下界. 另一方面,2001 年间 (见 “有限元方法的精度与外推”, 河北大学讲座,2001), 我们已对椭圆型方程的几个非协调元求出了特征值的渐近展开式, 在得到外推之余, 并得到了下界 (作为副产品). 又见 [7]. 但是, 我们的工作没有做好, 这种展开式的致命弱点在于：1) 网格基本限于矩形 (甚至均匀); 2) 解要光滑.(但值得注意, 有限元渐进展开式已由 Asadzadeh-Schatz-Wendland[8,9] 拓广到不等式情形, 可能打开了一道大门).

从 2002 年开始, 刘会坡 - 刘力军 [10], 刘会坡 - 严宁宁 [11], 黄宏财 - 李子才等 [12,13], 对 Wilson 元,Q_1 旋转元以及拓广的 Q_1 旋转元 (后者来于 Tobiska- 周爱辉等 [14] 的理论), 对我们的特征值渐近展开式以及外推和下界, 又进行了计算和研究.

进展来自 2008 年李友爱 [15] 的论文 (2006 年的工作), 她抛弃了我们原先的特征值渐近展开式, 采用了 Armentano-Durán[16] 的方法, 第一次对拓广的 Q_1 旋转元, 在非均匀网格下得到了光滑和奇异解以及的下界结果. 同时, 杨一都小组和张智民 [17] 已经有了系统的工作, 这就打开了求下界的大门. 最近, 杨一都小组 [18] 对板问题的 Morley 元又做了同样的工作, 值

收稿日期:
* 通讯作者

得注意, 后者适用于一般三角形网格, 这突破了我们原有的渐近展开式只限于矩形网格的限制.

当前最重要的工作来自于胡俊 - 黄云清等 [19], 他们对特征值的下界给出一套系统的方法和理论, 包括拓广的旋转元, 拓广的 Crouzeix-Raviart 元, Wilson 元, Adini 元, Morley-Wang-Xu 元等的下界逼近结果, 使得对标准的椭圆方程, 接近画下了句号.

在我们最近的讨论班上, 对 Stokes 方程混合元采用前面的思想得到相应的展开式, 并用之分析拓广的旋转元以及拓广的 Crouzeix-Raviart 元, 同样得到了特征值下界. 另外我们同时还分析了 Crouzeix-Raviart 元和 Q_1 旋转元的下界逼近情况.

所以本文的目的是通过利用如下四种混合有限元:

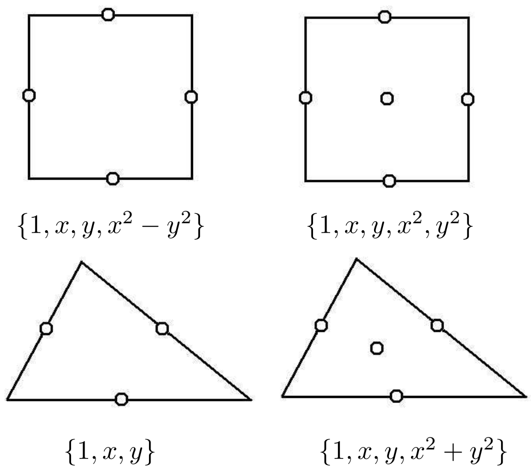

图 1

提供求 Stokes 特征值下界的方法.

这里我们需要求解的 Stokes 特征值问题如下 [20,21]

求 $(\boldsymbol{u}, p, \lambda)$ 使得

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \lambda \boldsymbol{u} & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \\ \int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}\Omega = 1, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,Δ, ∇ 和 $\nabla\cdot$ 分别表示 Laplacian, 梯度和散度算子. 对于 Stokes 特征值问题,Babuška-Osborn [22,23], Mercier-Osborn 等 [24] 基于紧算子的谱理论 [25] 给出了相应的混合有限元逼近的理论分析. 在 [26,27] 给出了相应的后验误差估计子的情况, [28,29] 给出相应的外推分析.

与问题 (1) 相应的弱形式为

求 $(\boldsymbol{u}, p, \lambda) \in \boldsymbol{V} \times W \times \mathcal{R}$ 使得 $s(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1$, 并且

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = \lambda s(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) & \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0 & \forall q \in W, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{V}=(H_0^1(\Omega))^2$, $W=L_0^2(\Omega)$ 和

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Omega,$$
$$b(\boldsymbol{v},p)=-\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{v}p\mathrm{d}\Omega,$$
$$s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_\Omega \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Omega.$$

参看 [30–34]. 由 [22] 中的结论, 我们可以知道 Stokes 特征值问题 (2) 有特征值系列 $\{\lambda_j\}$

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le,\cdots,\le\lambda_k\le,\cdots,\quad \lim_{k\to\infty}\lambda_k=\infty,$$

和相应的特征函数系列

$$(\boldsymbol{u}_1,p_1),(\boldsymbol{u}_2,p_2),\cdots,(\boldsymbol{u}_k,p_k),\cdots,$$

其中 $s(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\delta_{ij}$. 为了简单起见, 这里只讨论单特征值的情况.

对特征值问题 (1), 如下的 Rayleigh 商公式成立

$$\lambda=\frac{a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}{s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}. \tag{3}$$

下面, 我们定义离散的有限元空间来求解问题 (2). 令 $\mathcal{T}_h$ 表示区间 Ω 上一个尺度为 h 的拟一致的有限元剖分（三角形或者矩形）. 为了定义有限元空间和相应的有限元插值, 我们介绍一些与剖分相关的符号. 令 $\mathcal{E}_h$ 表示剖分 $\mathcal{T}_h$ 上所有边的集合. 在剖分 $\mathcal{T}_h$ 上我们定义相应的非协调有限元空间 $\boldsymbol{V}_h\not\subset\boldsymbol{V}$[32,35]. 本文中的非协调元表示空间不包含在 $(H^1(\Omega))^2$ 中.

我们定义特征对 $(\boldsymbol{u},p,\lambda)$ 有限元逼近 $(\boldsymbol{u}_h,p_h,\lambda_h)\in\boldsymbol{V}_h\times W_h\times\mathcal{R}$ 为：$s(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h)=1$ 并且

$$\begin{cases} a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{v}_h,p_h)=\lambda_h s(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) & \forall\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h,\\ b_h(\boldsymbol{u}_h,q_h)=0 & \forall q_h\in W_h,\end{cases} \tag{4}$$

其中所用到的双线性元的定义为

$$a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla\boldsymbol{u}_h\nabla\boldsymbol{v}_h dxdy,$$
$$b_h(\boldsymbol{u}_h,q_h)=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla\boldsymbol{u}_h q_h dxdy.$$

由于这个双线性形式是在 $\boldsymbol{V}_h$ 一致椭圆的, 据此, 我们可以定义在空间 $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}_h$ 上的范数为如下的形式

$$\|\boldsymbol{v}_h\|_{1,h}^2=a_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h).$$

由 (4), 我们同样知道 λ_h 有如下的 Rayleigh 商的表达形式

$$\lambda_h=\frac{a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h)}{s(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h)}. \tag{5}$$

由 [22] 知道离散 Stokes 特征值问题 (4) 有特征值序列

$$0<(\lambda_1)_h\le(\lambda_2)_h\le\cdots\le(\lambda_k)_h\le\cdots\le(\lambda_N)_h,$$

和相应的特征函数序列

$$((\boldsymbol{u}_1)_h,(p_1)_h),((\boldsymbol{u}_2)_h,(p_2)_h),\cdots,((\boldsymbol{u}_k)_h,(p_k)_h),\cdots,((\boldsymbol{u}_N)_h,(p_N)_h),$$

其中 $s((\boldsymbol{u}_i)_h,(\boldsymbol{u}_j)_h)=\delta_{ij},1\le i,j\le N$.

离散问题 (2) 的适定性可以由空间 $\boldsymbol{V}_h$ 和 W_h 满足相应 Babuška-Brezzi 条件来保证 ([32] 并且 [35])

$$\inf_{0\neq q_h\in W_h}\sup_{0\neq \boldsymbol{v}_h\in \boldsymbol{V}_h}\frac{b_h(\boldsymbol{v}_h,q_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{1,h}\|q_h\|_0}\geq C>0. \tag{6}$$

我们知道 Stokes 特征值问题有限元逼近的收敛性依赖于精确特征函数的正则性. 这里假设特征函数有如下的正则性 [36−40]

$$\|\boldsymbol{u}\|_{1+\gamma}+\|p\|_\gamma\leq C, \tag{7}$$

其中 $0<\gamma\leq 1$ 是一个由求解区域边界 $\partial\Omega$ 最大内角决定的 [36,40].

本文中, 我们只考虑最低阶的非协调元, 它们包括 Crouzeix-Raviart, Q_1 旋转元和拓广的 Q_1 旋转元, 同时还分析一种类似于拓广的 Q_1 旋转元的在三角形上的拓广的 Crouzeix-Raviart 元. 用这些单元来组成速度逼近空间 $\boldsymbol{V}_h$, 结合由分片常数构成的压力逼近空间 W_h. 所有这些单元得到的特征值逼近 λ_h 和相应的特征函数逼近 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)$ 有如下的误差估计 [23−24,32,35,41]

$$|\lambda-\lambda_h|\leq Ch^{2\gamma}(\|\boldsymbol{u}\|_{1+\gamma}+\|p\|_\gamma)^2, \tag{8}$$

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{1,h}+\|p-p_h\|_0\leq\ Ch^{\gamma}(\|\boldsymbol{u}\|_{1+\gamma}+\|p\|_\gamma)\ , \tag{9}$$

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_0\leq\ Ch^{2\gamma}(\|\boldsymbol{u}\|_{1+\gamma}+\|p\|_\gamma). \tag{10}$$

下面的展开式引理类似于 Armentano-Durán 在 [16] 中给出的相应于 Laplace 特征值问题的展开式, 同时在文 [17,19, 43–44] 中得到了运用和进一步发展.

引理 1.1 假设 $\lambda,(\boldsymbol{u},p)\in\boldsymbol{V}\times W$ 是问题 (1) 一个特征函数对, $\lambda_h,(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{V}_h\times W_h$ 为离散问题 (4) 相应的函数对. 假设 $W_h\subset W$, 并且空间 $\boldsymbol{V}_h$ 和 W_h 满足相应的 Babuška-Brezzi 条件 (6). 则我们有如下的展开式

$$\begin{aligned}\lambda-\lambda_h=\ &\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2-\lambda_h\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h\|_0^2+\lambda_h(\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2-\|\boldsymbol{u}\|_0^2)\\ &+2a_h(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{u}_h)-2b_h(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u},p_h),\quad\forall\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}^h.\end{aligned} \tag{11}$$

证明 选择单位特征函数 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}_h$ 使得 $s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=1$ 和 $s(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h)=1$, 则我们有

$$\|\boldsymbol{u}\|_1^2=\lambda,\qquad\|\boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2=\lambda_h.$$

然而对于任意 $\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h$ 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2&=\|\boldsymbol{u}\|_{1,h}^2+\|\boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2-2a_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_h)\\ &=\lambda+\lambda_h-2a_h(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{u}_h)-2a_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{u}_h).\end{aligned} \tag{12}$$

在 (12) 两边同时加上 $-2b_h(\boldsymbol{v}_h,p_h)$, 我们可以得到

$$\begin{aligned}&-2a_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{u}_h)-2b_h(\boldsymbol{v}_h,p_h)=-2\lambda_hs(\mathbf{v}_h,\boldsymbol{u}_h)\\ &=\lambda_h\|\mathbf{v}_h-\boldsymbol{u}_h\|_0^2-\lambda_h\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2-\lambda_h\|\boldsymbol{u}_h\|_0^2\\ &=\lambda_h\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h\|_0^2-\lambda_h(\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2-\|\boldsymbol{u}\|_0^2)-2\lambda_h.\end{aligned}$$

结合条件 $b_h(\boldsymbol{u},p_h)=0$ 可以得到对任意 $\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h$ 有

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2-2b_h(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u},p_h)\\ &=\lambda-\lambda_h-2a_h(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{u}_h)+\lambda_h\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h\|_0^2-\lambda_h(\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2-\|\boldsymbol{u}\|_0^2).\end{aligned}$$

调整等式两边的相应的项即可以得到所需证的展开式 (11).

2 Crouzeix-Raviart 元

Crouzeix-Raviart 是在 [44] 中提出的, 定义如下

$$V_h := \Big\{v \in L^2(\Omega):\ v|_K \in \operatorname{span}\{1,x,y\},\ 对任意的K \in \mathcal{T}_h,\ v在边上中点处连续,$$
$$且\int_l v|_K \mathrm{d}s = 0\ 若K \cap \partial\Omega = l\Big\}.$$

有限元空间 W_h 定义如下

$$W_h := \Big\{w \in L^2(\Omega): w|_K \in \operatorname{span}\{1},\ 对任意的K \in \mathcal{T}_h\Big\}. \tag{13}$$

由 [32] 可知上述两个有限元空间满足 Babuška-Brezzi 条件.

本节我们证明 Crouzeix-Raviart 元对于 Stokes 特征值问题的奇异情形给出下界. 定义插值 $\Pi_h : H^1(\Omega) \mapsto V_h$ 为

$$\int_l \Pi_h \boldsymbol{u} \mathrm{d}s = \int_l \boldsymbol{u} \mathrm{d}s, \quad \forall l \in \mathcal{E}_h. \tag{14}$$

引理 2.1 对于 Crouzeix-Raviart 元, 下述误差估计

$$\|\boldsymbol{u} - \Pi_h\boldsymbol{u}\|_0 + h\|\boldsymbol{u} - \Pi_h\boldsymbol{u}\|_{1,h} \le Ch^{1+\gamma}\|\boldsymbol{u}\|_{1+\gamma}, \tag{15}$$

对任意 $\boldsymbol{u} \in (H^{1+\gamma}(\Omega))^2$ 成立.

由引理 1.1, 对于 Crouzeix-Raviart 元, 当解奇异时, 我们有

定理 2.2 令 λ_j 和 $\lambda_{j,h}$ 是原问题以及用 Crouzeix-Raviart 元求解的有限元问题的第 j 个特征值,令 $\boldsymbol{u}_j \in (H^{1+\gamma}(\Omega))^2$ 满足 $0 < \gamma < 1$ 及 $\|\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j,h}\|_{1,h}^2 \ge Ch^{1+\gamma-\delta}$, $\delta > 0$ 可以任意小. 则当 h 充分小时, 我们有

$$\lambda_{j,h} \le \lambda_j. \tag{16}$$

证明 令 $\boldsymbol{v}_h = \Pi_h\boldsymbol{u}$, 我们对展开式 (11) 的五项做逐项估计.

首先由误差估计 (8)-(10), 显然 $\lambda_h\|\Pi_h\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_0^2$ 较之于 $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2$ 是高阶项. 对于 $\lambda_h(\|\Pi_h\boldsymbol{u}\|_0^2 - \|\boldsymbol{u}_h\|_0^2)$, 我们有如下的估计

$$\begin{aligned}\lambda_h\Big|\big(\|\Pi_h\boldsymbol{u}\|_0^2 - \|\boldsymbol{u}\|_0^2\big)\Big| &= \lambda_h\Big|\int_\Omega \big(\Pi_h\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\big)\big(\Pi_h\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\big)dxdy\Big| \\ &\le C\lambda h^{1+\gamma}\|\boldsymbol{u}\|_{1+\gamma}.\end{aligned} \tag{17}$$

由 Crouzeix-Raviart 元插值 Π_h 的定义, 可得

$$a_h(\boldsymbol{u} - \Pi_h\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_h) = 0,\ \ 及\ \ b_h(\boldsymbol{u} - \Pi_h\boldsymbol{u}, p_h) = 0. \tag{18}$$

从上述分析 (17)-(18) 以及 $2\gamma < 1+\gamma$ 和定理条件, 当奇异情形时, 即 $\gamma < 1$ 我们有

$$\begin{aligned}\lambda_j - \lambda_{j,h} &= \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2 + \mathcal{O}(h^{1+\gamma}) \\ &\ge Ch^{1+\gamma-\delta} + \mathcal{O}(h^{1+\gamma}).\end{aligned} \tag{19}$$

从 (19) 可知, 当 h 充分小时, 我们有 $\lambda_j - \lambda_{j,h} \ge 0$, 证毕.

3 非协调的Q_1旋转元

这一节中, 我们将讨论 Q_1^{rot} 元的特征值的下界性. 假设 $\mathcal{T}_h$ 是方形剖分, 那么 Q_1^{rot} 元空间定义为

$$V_h := \Big\{v \in L_2(\Omega) : v|_K \in \mathrm{span}\{1, x, y, x^2 - y^2\}, \int_l v|_{K_1}\mathrm{d}s = \int_l v|_{K_2}\mathrm{d}s,$$
$$\text{当}K_1 \cap K_2 = l \text{ 且} \int_l v|_K\mathrm{d}s = 0 \text{ 若}K \cap \partial\Omega = l\Big\}, \tag{20}$$

其中 $K, K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ 且 $\boldsymbol{V}_h = V_h^2$. 有限元空间 W_h 定义为

$$W_h := \Big\{w \in L^2(\Omega) : w|_K \in \mathrm{span}\{1\},\ \text{对任意的 } K \in \mathcal{T}_h\Big\}. \tag{21}$$

由 [32] 知道两个空间满足 Babuška-Brezzi 条件.

这里我们将讨论奇异情形下,Stokes 方程 Q_1^{rot}/P_0 元的特征值下界问题. 首先定义插值算子 $\Pi_h : H^1(\Omega) \mapsto V_h$

$$\int_l \Pi_h \boldsymbol{u}\mathrm{d}s = \int_l \boldsymbol{u}\mathrm{d}s, \quad \forall l \in \mathcal{E}_h. \tag{22}$$

引理 3.1 设 $\boldsymbol{u} \in (H^{1+\gamma}(\Omega))^2$, 则对于 Q_1^{rot} 元, 下述误差估计式成立

$$\|\boldsymbol{u} - \Pi_h\boldsymbol{u}\|_0 + h\|\boldsymbol{u} - \Pi_h\boldsymbol{u}\|_{1,h} \le Ch^{1+\gamma}\|\boldsymbol{u}\|_{1+\gamma}. \tag{23}$$

对 Q_1^{rot}/P_0 元, 应用引理 1.1, 我们有

定理 3.2 设 λ_j 和 $\lambda_{j,h}$ 分别是第 j 个精确特征值和相应的 Q_1^{rot}/P_0 元的逼近值. 设 $\boldsymbol{u}_j \in (H^{1+\gamma}(\Omega))^2$, 其中 $0 < \gamma < 1$ 且 $\|\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j,h}\|_{1,h}^2 \ge Ch^{1+\gamma-\delta}$. 那么, 当 h 充分小时, 有

$$\lambda_{j,h} \le \lambda_j. \tag{24}$$

证明 设 $\boldsymbol{v}_h = \Pi_h\boldsymbol{u}$, 由误差估计 (8)–(10) 和插值误差估计 (23), 得到非协调误差估计

$$\|\boldsymbol{u}_j - \Pi_h\boldsymbol{u}_j\|_0 \le h^{1+\gamma}\|\boldsymbol{u}_j\|_{1+\gamma},$$
$$\|\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j,h}\|_{1,h} \le Ch^{\gamma}\|\boldsymbol{u}_j\|_{1+\gamma},$$
$$\|\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j,h}\|_0 \le Ch^{2\gamma}\|\boldsymbol{u}_j\|_{1+\gamma}.$$

类似于 Crouzeix-Raviart 元, 当 $0 < \gamma < 1$ 时, 相对于第一项 $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{1,h}^2$,
$\lambda_h\|\Pi_h\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_0^2$ 和 $\lambda_h(\|\Pi_h\boldsymbol{u}\|_0^2 - \|\boldsymbol{u}\|_0^2)$ 都是高阶项.

幸运的是,Q_1^{rot} 元的插值 Π_h 有

$$a_h(\boldsymbol{u} - \Pi_h\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_h) = 0, \ \ \text{及} \ \ b_h(\boldsymbol{u} - \Pi_h\boldsymbol{u}, p_h) = 0 \tag{25}$$

基于上述分析, 对于奇异情形我们得到了 (24).

4 非协调拓广的Q_1旋转元

定义在矩形剖分上非协调的 EQ_1^{rot} 元由 Tobiska- 周爱辉等在 [14] 中提出. 因此, 本节我们假设 $\mathcal{T}_h$ 是矩形剖分,EQ_1^{rot} 元定义如下：

$$V_h := \Big\{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathrm{span}\{1, x, y, x^2, y^2\}, \int_l v|_{K_1}\mathrm{d}s = \int_1 v|_{K_2}\mathrm{d}s,$$
$$\text{当}K_1 \cap K_2 = l,\ \text{且} \int_l v|_K\mathrm{d}s = 0,\ \text{若}K \cap \partial\Omega = l\Big\}, \tag{26}$$

其中 $K, K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ 且令 $\boldsymbol{V}_h := V_h^2$. 有限元空间 W_h 定义为

$$W_h := \Big\{w \in L^2(\Omega) : w|_K \in \mathrm{span}\{1\},\ \text{对任意的 } K \in \mathcal{T}_h\Big\}. \tag{27}$$

由 [32] 可知上述两个空间满足 Babuška-Brezzi 条件 (6).

我们将证明对于无论光滑和奇异情形, 即 $0 < \gamma \leq 1$, 下界都得到, 即本节指出混合元 EQ_1^{rot}/P_0 能得到 Stokes 特征值问题的下界. 我们将插值函数 $\Pi_h : H^1(\Omega) \mapsto V_h$ 定义为

$$\int_l \Pi_h u \mathrm{d}s = \int_l u \mathrm{d}s \quad \forall l \in \mathcal{E}_h \text{ 且 } \int_K \Pi_h u dx = \int_K u dx \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{28}$$

引理 4.1 对于 EQ_1^{rot} 元, 下述误差估计

$$\|\boldsymbol{u} - \Pi_h \boldsymbol{u}\|_0 + h\|\boldsymbol{u} - \Pi_h \boldsymbol{u}\|_{1,h} \leq Ch^{1+\gamma}\|\boldsymbol{u}\|_{1+\gamma}, \tag{29}$$

对任意 $\boldsymbol{u} \in (H^{1+\gamma}(\Omega))^2$ 成立.

由引理 1.1, 对于 EQ_1^{rot}/P_0, 我们有:

定理 4.2 令 λ_j 和 $\lambda_{j,h}$ 是原问题以及用 EQ_1^{rot}/P_0 求解的有限元问题的第 j 个特征值, 令 $\boldsymbol{u}_j \in (H^{1+\gamma}(\Omega))^2$ 满足 $0 < \gamma \leq 1$ 及 $\|\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j,h}\|_{1,h}^2 \geq Ch^{2+\gamma-\delta} + Ch^{4\gamma-\delta}$, 则当 h 充分小, 我们有

$$\lambda_{j,h} \leq \lambda_j. \tag{30}$$

证明 令 $\mathbf{v}_h = \Pi_h \boldsymbol{u}$, 我们对展开式 (11) 的五项做逐项估计.

对于第 2 项和第 3 项, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\Pi_h \boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j,h}\|_0^2 \leq \|\Pi_h \boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_j\|_0^2 + \|\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j,h}\|_0^2 \leq Ch^{4\gamma}\|\boldsymbol{u}_j\|_{1+\gamma}^2,\\
&\Big|\|\Pi_h \boldsymbol{u}_j\|_0^2 - \|\boldsymbol{u}_j\|^2\Big| = \Big|\int_\Omega (\boldsymbol{u}_j - \Pi_h \boldsymbol{u}_j)(\boldsymbol{u}_j + \Pi_h \boldsymbol{u}_j)\Big|\\
=&\Big|\int_\Omega (\boldsymbol{u}_j - \Pi_h \boldsymbol{u}_j)\big((\boldsymbol{u}_j + \Pi_h \boldsymbol{u}_j) - \Pi_0(\boldsymbol{u}_j + \Pi_h \boldsymbol{u}_j)\big)dx\Big| \leq Ch^{2+\gamma}\|\boldsymbol{u}_j\|_{1+\gamma},
\end{aligned}$$

其中 Π_0 表示分片常数插值算子. 对于第四项, 由 [7] 我们有

$$a_h(\boldsymbol{u} - \Pi_h \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h. \tag{31}$$

对最后一项, 由分部积分得

$$b_h(\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, p_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} p_h \mathrm{d}s = 0. \tag{32}$$

当 $0 < \gamma \leq 1$ 时, 有 $2\gamma < 4\gamma$ 和 $2\gamma < 2 + \gamma$, 结合定理条件知第一项是主项, 证毕.

5　拓广的 Crouzeix-Raviart 元

本节, 我们讨论对前述结果的拓展. 基于前文分析, 我们发现 EQ_1^{rot} 能给出特征值问题的下界. 那么, 我们能否对于三角形剖分找到类似于 EQ_1^{rot} 之于矩形剖分的有限元空间吗? 首先, 假设

$$W_h = \Big\{p \in L_0^2(\Omega) : p|_K \in \mathrm{span}\{1\}, \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h\Big\}. \tag{33}$$

类似于 EQ_1^{rot}, 基于展开式 (11), 假如我们能构造一个混合元空间 $\boldsymbol{V}_h$ 满足

$$a_h(\boldsymbol{u} - \Pi_h \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h, \tag{34}$$

$$b_h(\boldsymbol{u} - \Pi_h \boldsymbol{u}, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in W_h, \tag{35}$$

$$\int_K (\boldsymbol{u} - \Pi_h \boldsymbol{u}) \mathrm{d}K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{36}$$

那么, 通过这种混合元 $\boldsymbol{V}_h \times W_h$ 对于奇异和光滑的情形, 即 $0 < \gamma \leq 1$, 得到特征值的下界.

为了满足 (34)-(36), 我们需要让 $\boldsymbol{V}_h$ 在任意 $K\in\mathcal{T}_h$ 有如下性质

$$\int_{\partial K}(\boldsymbol{u}-\Pi_h\boldsymbol{u})\frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=0, \tag{37}$$

$$\int_{K}(\boldsymbol{u}-\Pi_h\boldsymbol{u})\Delta\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}K=0, \tag{38}$$

$$\int_{\partial K}\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{u}-\Pi_h\boldsymbol{u})\mathrm{d}s=0. \tag{39}$$

对于 $K\in\mathcal{T}_h$ 加上一个高阶的多项式, 条件 (38) 及条件 (39) 是容易满足的. 为了满足条件 (37), 则对任给 $\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h$ 应满足

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial \mathbf{n}}\Big|_l\in\mathrm{span}\{1\},\quad \forall l\in\mathcal{E}_h. \tag{40}$$

假设空间为

$$V_h:=\Big\{v\in L^2(\Omega):v|_K\in\mathrm{span}\{1,x,y,c_1x^2+c_2xy+c_3y^2\},\textstyle\int_l v|_{K_1}\mathrm{d}s=\int_1 v|_{K_2}\mathrm{d}s,$$
$$\text{if } K_1\cap K_2=l,\ \text{且}\textstyle\int_l v|_K\mathrm{d}s=0,\ \text{if } K\cap\partial\Omega=l\Big\}. \tag{41}$$

考虑 c_1,c_2 和 c_3 取何值时满足条件 (40). 假设用 $y=kx+b$ $(k>0)$ 表示任意一边 $l\in\mathcal{E}_h$, 其上的法向量为 $\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(k,-1)$. 则有

$$\frac{\partial\big(c_1x^2+c_2xy+c^3y^2\big)}{\partial\mathbf{n}}|_l=\tfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}\Big(\big(k(c_1-c_3)+(k^2-1)c_2\big)x+kc_2b-c_3b\Big).$$

因此, 为了使 $\frac{\partial\left(c_1x^2+c_2xy+c^3y^2\right)}{\partial\mathbf{n}}\big|_l$ 对任给的 x 和 k 在相应边 $l\in\mathcal{E}_h$ 上都是常数, 我们只需让 $c_1=c_3$,$c_2=0$. 因此加入的高阶多项式应为 x^2+y^2.

所以, 我们可以定义如下的有限元空间

$$V_h:=\Big\{v\in L^2(\Omega):v|_K\in\mathrm{span}\{1,x,y,x^2+y^2\},\textstyle\int_l v|_{K_1}\mathrm{d}s=\int_1 v|_{K_2}\mathrm{d}s,$$
$$\text{当}K_1\cap K_2=l,\text{且}\textstyle\int_l v|_K\mathrm{d}s=0,\ \text{若}K\cap\partial\Omega=l\Big\}, \tag{42}$$

其中 $K,K_1,K_2\in\mathcal{T}_h$ 且令 $\boldsymbol{V}_h:=V_h^2$,W_h 定义见 (33). 易证, 混合元空间 $\boldsymbol{V}_h\times W_h$ 对 $0<\gamma\leq 1$ 情形的特征值问题给出下界, 即有在三角形网格上有定理 4.2 同样的结论.

6 数值结果

本节, 我们给出一些数值结果证实前文的分析. 这里的数值算例是求解单位正方形和 L 形区域上的 Stokes 问题 (1).

6.1 单位正方形区域

表格 1–4 给出了在单位正方形上的 Stokes 问题前 6 个特征值的逼近情况, 从中我们可以发现 Crouzeix-Raviart 元,EQ_1^{rot} 和拓广的 Crouzeix-Raviart 元均可以得到特征值逼近的下界. 但是 EQ_1^{rot} 元有时候得到的是特征值的上界.

6.2 *L*形区域

表格 5–8 给出了在 L 形区域上的 Stokes 问题前 6 个特征值的逼近情况, 从中我们可以发现 Crouzeix-Raviart 元, EQ_1^{rot} 和拓广的 Crouzeix-Raviart 元均可以得到特征值逼近的下界. 但是 Q_1 旋转元同样有时候得到的是特征值的上界.

表 1　Crouzeix-Raviart 元在单位正方形上

Mesh	0	1	2	3	Trend
λ_1	51.47517	52.11400	52.28577	52.32986	$\nearrow$
λ_2	89.39327	91.41967	91.94577	92.07952	$\nearrow$
λ_3	89.42537	91.42597	91.94724	92.07988	$\nearrow$
λ_4	122.60546	126.74133	127.83564	128.11551	$\nearrow$
λ_5	146.96115	152.31526	153.66996	154.01129	$\nearrow$
λ_6	162.30562	165.80950	166.71938	166.95127	$\nearrow$

表 2　Q_1^{rot}/P_0 元在单位正方形上

Mesh	8×8	16×16	32×32	64×64	Trend
λ_1	52.25687	52.31237	52.33577	52.34240	$\nearrow$
λ_2	92.65807	92.27314	92.16176	92.13373	$\searrow$
λ_3	92.65808	92.27314	92.16176	92.13373	$\searrow$
λ_4	124.90202	127.37868	127.99982	128.15696	$\nearrow$
λ_5	159.05873	155.56771	154.49594	154.21864	$\searrow$
λ_6	178.12732	169.87177	167.73889	167.20644	$\searrow$

表 3　EQ_1^{rot}/P_0 元在单位正方形上

Mesh	8×8	16×16	32×32	64×64	Trend
λ_1	50.62545	51.87664	52.22493	52.31457	$\nearrow$
λ_2	87.83065	90.93951	91.81949	92.04759	$\nearrow$
λ_3	87.83065	90.93951	91.81949	92.04759	$\nearrow$
λ_4	116.57122	124.87392	127.34208	127.99045	$\nearrow$
λ_5	146.04942	151.87176	153.54032	153.97769	$\nearrow$
λ_6	162.33909	165.49138	166.61400	166.92329	$\nearrow$

表 4　拓广的 Crouzeix-Raviart 元在单位正方形上

Mesh	0	1	2	3	Trend
λ_1	51.17659	52.03636	52.26616	52.32494	$\nearrow$
λ_2	88.47842	91.17294	91.88279	92.06369	$\nearrow$
λ_3	88.51147	91.18182	91.88527	92.06434	$\nearrow$
λ_4	120.91279	126.27147	127.71495	128.08514	$\nearrow$
λ_5	144.59254	151.64896	153.49840	153.96809	$\nearrow$
λ_6	159.25087	164.97426	166.50577	166.89756	$\nearrow$

表 5 Crouzeix-Raviart 元在 L 形区域上

Mesh	0	1	2	3	4	Trend
λ_1	22.49469	28.15681	30.54221	31.48226	31.85582	$\nearrow$
λ_2	22.92567	32.37163	35.68702	36.64265	36.91235	$\nearrow$
λ_3	28.48313	38.26178	40.98085	41.68270	41.86679	$\nearrow$
λ_4	33.75109	44.18539	47.65948	48.63209	48.89221	$\nearrow$
λ_5	39.47117	48.95585	53.34894	54.77844	55.20802	$\nearrow$
λ_6	40.30679	59.71968	66.39481	68.43863	69.12011	$\nearrow$

表 6 Q_1^{rot}/P_0 元在 L 形区域上

Mesh	4×4	8×8	16×16	32×32	Trend
λ_1	30.30390	31.26843	31.71998	31.93768	$\nearrow$
λ_2	36.79391	36.93405	36.97253	36.99869	$\nearrow$
λ_3	41.93838	41.98381	41.94029	41.93306	$\searrow$
λ_4	48.09249	48.74571	48.91546	48.96462	$\nearrow$
λ_5	53.55023	54.65239	55.13238	55.30553	$\nearrow$
λ_6	70.94088	69.58998	69.31962	69.36626	$\nearrow$

表 7 EQ_1^{rot}/P_0 元在 L 形区域上

Mesh	4×4	8×8	16×16	32×32	Trend
λ_1	28.31965	30.66373	31.55838	31.89631	$\nearrow$
λ_2	33.96093	36.09799	36.75346	36.94321	$\nearrow$
λ_3	38.38707	40.91276	41.65899	41.86183	$\nearrow$
λ_4	43.60320	47.31776	48.53394	48.86757	$\nearrow$
λ_5	48.17742	52.87433	54.64897	55.18179	$\nearrow$
λ_6	62.11476	66.77009	68.55979	69.17190	$\nearrow$

表 8 拓广的 Crouzeix-Raviart 元在 L 形区域上

Mesh	0	1	2	3	4	趋势
λ_1	21.40172	27.66835	30.39310	31.44233	31.84559	$\nearrow$
λ_2	21.88166	31.67967	35.45192	36.57879	36.89602	$\nearrow$
λ_3	26.72452	37.21625	40.64764	41.59411	41.84428	$\nearrow$
λ_4	31.57611	42.89652	47.25776	48.52563	48.86519	$\nearrow$
λ_5	36.86130	47.49463	52.88224	54.65226	55.17572	$\nearrow$
λ_6	37.17575	57.79266	65.73588	68.25912	69.07409	$\nearrow$

参考文献

[1] 冯康, 基于变分原理的差分格式. 应用数学与计算数学, 2(4)(1965), 238-262.

[2] M. Křížek and P. Neittaanmaki, Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl Math, Vol.50, 1990.

[3] V. Shaidurov, Multigrid Methods for Finite Elements, Math and its Appl., Vol. 318, Kluwer Academic Pulisher, Dordrecht, 1995.

[4] G. Strang and G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, NJ:Englewood Cliffs, 1973.

[5] J. Hu, Y. Q. Huang and H. M. Shen, The lower approximation of eigenvalue by lumped mass finite element methods, J. Comput. Math. 22(2004), 545-556.

[6] R.Rannacher, Nonconforming finite element methods for eigenvalue problems in linear plate theory, Numer Math 33,23-42, 1979.

[7] Q. Lin and J. Lin, Finite Element Methods: Accuracy and Improvement, Science press: Beijing, 2006.

[8] M. Asadzadeh, A. H. Schatz and W. Wendland, A new approach to Richardson extrapolation in the finite element method for second order elliptic problems, Math. Comp. 78 (2009) 1951-1973.

[9] M. Asadzadeh, A. H. Schatz and W. Wendland, Asymptotic error expansions for the finite element method for second order elliptic problems in R_N, $N \geq 2$, I: Local interior expansions,To appear in SIAM Journal on Numerical Analysis 2010.

[10] 刘会坡, 刘力军, 特征值问题 Q_1^{rot} 元的展开及外推, 河北大学学报自然科学版, 1(2003), 11-15.

[11] H. P. Liu and N. N. Yan, Four finite element solutions and comparisions of problem for the Poisson equation eigenvalue, J. Numer. Method. & Comput. Appl. 2(2005), 81-91.

[12] Q. Lin, H. T. Huang and Z. C. Li, New expansions of numerical eigenvalues for $-\triangle u = \lambda \rho u$ by nonconforming elements, Math. Comput., 77(2008), 2061-2084.

[13] Q. Lin, H. T. Huang and Z. C. Li, New expansions of numerical eigenvalues by Wilson's elements, J. Comput. Appl. Math., 225(2009), 213-226.

[14] Q. Lin, L. Tobiska and A. Zhou, Superconvergence and extrapolation of nonconforming low order finite elements applied to the Poisson equation, IMA. J. Numer. Anal., 25(2005), 160-181.

[15] Y. A. Li, Lower approximation of eigenvalue by the nonconforming finite element method, Math Numer Sin 30(2)(2008),195-200.

[16] M. G. Armentano and R.G.Durán, Asymptotic lower bounds for eigenvalues by nonconforming finit element methods, Electron. Trans. Numer. Anal., 17(2004), 92-101.

[17] Y. D. Yang, Z. M. Zhang and F. B. Lin, Eigenvalue approximation from below using nonforming finite elements, Sci. China Math., 53(1)(2010), 137-150.

[18] Y. D. Yang, Q. Lin, H. Bi and Q. Li, Eigenvalue approximations from below using Morley elements, submitted, 2010.

[19] J. Hu, Y. Q. Huang and Q. Lin, The lower bounds for eigenvalues of elliptic operators–By nonconforming finite element methods, submitted.

[20] P. F. Batcho and G.E.M. Karniadakis, Generalized Stokes eigenfunctions: a new trial basis for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., 115(1994), 121-1146.

[21] E. Leriche and G. Labrosse, Stokes eigenmodes in square domain and the stream function-vorticity correlation, J. Comput. Phys., 200(2004), 489-511.

[22] I. Babuška and J. E. Osborn, Eigenvalue problems, in P.G Ciarlet, J.L. Lions(Eds), Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, Finite Element Methods (Part I), North-Holland, Amsterdam, 1991, 641-787.

[23] I. Babuška and J. E. Osborn, Finite element-Galerkin approximation of the eigenvalues and eigenvectors of selfadjoint problems, Math. Comp. 52(1989), 275-297.

[24] B. Mercier, J. Osborn, J. Rappaz and P.A. Raviart, Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods, Math. Comput., 36 (154) (1981), 427-453.

[25] F. Chatelin, Spectral Approximation of Linear Operators, Academic Press Inc, New York, 1983.

[26] V. Heuveline and R. Rannacher, Adaptive FEM for eigenvalue problems with application in hydrodynamic stability analysis, J. Numer. Math., Vol. 0, No. 0 (2006), 1-32.

[27] C. Lovadina, M. Lyly and R. Stenberg, A posteriori estimates for the Stokes eigenvalue problem, Numer. Methods Partial Differential Equations, 25(1)(2008), 244 - 257.

[28] W. Chen and Q. Lin, Asymptotic expansion and extrapolation for the Eigenvalue approximation of the biharmonic eigenvalue problem by Ciarlet-Raviart scheme, Adv. Comput. Math., 27(2007),95-106.

[29] X. Yin, H. Xie, S. Jiang and S. Gao, Asymptotic expansions and extrapolations of eigenvalues for the stokes problem by mixed finite element methods, J. Comput. Appl. Math., 215(2008), 127-141.

[30] D. N. Arnold and F. Brezzi, Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, postprocessing and error estimates, M^2AN, 19(1985), 7-32.

[31] S. Brenner and L. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, New York: Springer-Verlag, 1994.

[32] F. Brezzi and M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, New York: Springer-Verlag, 1991.

[33] Z. Chen, Finite Element Methods and Their Applications, Springer, New York, 2005.

[34] P. G. Ciarlet, The finite Element Method for Elliptic Problem, North-Holland Amsterdam, 1978.

[35] V. Girault and P. Raviart, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[36] C. Bacuta and J. H. Bramble, Regularity estimates for the solutions of the equations of linear elasticity in convex plane polygonal domain, Special issue dedicated to Lawrence E. Payne, Z. Angew. Math. Phys., 54 (2003), 874-878.

[37] C. Bacuta, J. H. Bramble and J. E. Pasciak, Shift theorems for the biharmonic Dirichlet problem, Recent Progress in Computational and Appl. PDEs, proceedings of the International Symposium on Computational and Applied PDEs, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001.

[38] H. Blum and R. Rannacher, On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, Math. Meth. in the Appl. Sci., 2 (1980), 556-581.

[39] E. B. Fabes, C. E. Kenig and G. C. Verchota, The Dirichlet problem for the Stokes system on Lipschitz domains, Duke Math. J., 57 (1998), 769-793.

[40] P. Grisvard, Singularities in Boundary Problems, MASSON and Springer-Verlag, 1985.

[41] J. Osborn, Approximation of the eigenvalue of a nonselfadjoint operator arising in the study of the stability of stationary solutions of the Navier-Stokes equations, SIAM J. Numer. Anal., 13 (1976), 185-197.

[42] Y. D. Yang, Q. Li and S. R. Li, Nonconforming finite element approximations of the Steklov eigenvalue problem, Appl. Numer. Math., 59(2009), 2388-2401.

[43] Y. D. Yang, F. B. Lin and Z. M. Zhang, N-simplex Crouzeix-Raviart element for the second-order elliptic/eigenvalue problems, Int. J. Numer. Anal. model., 6(4)(2009), 615-626.

[44] M. Crouzeix and P. A. Raviart, Conforming and nonconforming finite element for solving the stationary Stokes equations, RAIRO Anal. Numer., 3(1973), 33-75.

Stokes Eigenvalue Approximations from Below With Nonconforming Mixed Finite Element Methods

LIN Qun[1], XIE Hehu[1], LUO Fusheng[1], LI Yu[1], YANG Yidu[2]

(1. AMSS, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)
(2. SMCS, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

Abstract We provide the lower bounds of Stokes eigenvalue by using 4 nonconforming mixed finite elements: Crouzeix-Raviart ($\{1,x,y\}$), $Q_1^{\rm rot}(\{1,x,y,x^2-y^2\})$, extension $Q_1^{\rm rot}$ ($\{1,x,y,x^2,y^2\}$) and extension Crouzeix-Raviart ($\{1,x,y,x^2+y^2\}$). We find a suitable theoretical framework which makes the proof unified and surprisingly short, with a few steps only! Some numerical results are used to confirm the theoretical convergence results.

Keywords Stokes eigenvalue problem, approximation from below, nonconforming mixed finite element.