1998-99 学年度数值线性代数期终考试试卷

1. 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为实矩阵, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\in R^n$ 和 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T\in R^n$ 为两个实向量, 求证下列结论:

(a) 若 $Q\in R^{n\times n}$ 为正交矩阵, 则 $tr(A)=tr(Q^TAQ)$. 这里, $tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹, 即 $tr(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$;

(b) 若 A 非奇异, 则当 $1+x^TA^{-1}y\neq 0$ 时, $B=A+yx^T$ 亦非奇异, 且 $B^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}yx^TA^{-1}}{1+x^TA^{-1}y}$;

(c) 若 $\|x\|_p=(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}$, $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, 则 $\|x\|_\infty=\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p$;

(d) $\det(I+xy^T)=1+x^Ty$. 这里, I 为单位矩阵.

2. 若 $A\in R^{n\times n}$ 为非奇异矩阵, $r=\|A^{-1}E\|_p<1$, 则 $A+E$ 也为非奇异矩阵, 且

$$\|(A+E)^{-1}-A^{-1}\|_p\le\|E\|_p\|A^{-1}\|_p^2/(1-r).$$

3. 若 $A\in R^{m\times n}$, 则存在正交阵 $U\in R^{m\times m}$ 和 $V\in R^{n\times n}$, 使得 $A=U\Sigma V^T$, 其中 $\Sigma=diag(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p)$, $p=\min\{m,n\}$ 且 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\ldots\ge\sigma_p\ge 0$.

4. 设

$$B=\begin{pmatrix}\alpha & y^T\\ x & A\end{pmatrix}\in R^{(n+1)\times(n+1)},\qquad S=A-xy^T/\alpha,$$

其中 $\alpha\neq 0$, $x,y\in R^n$, $A\in R^{n\times n}$. 则

(a) 若 B 是列对角占优矩阵, 则 S 也是列对角占优矩阵;

(b) 若 B 是对称正定矩阵, 则 S 也是对称正定矩阵.

5. 叙述求解对称三对角特征值问题的‘分 − 治’算法, 并给出其理论依据.

6. 设 $A\in R^{n\times n}$. 设 D, $-L$ 和 $-U$ 分别为 A 的对角, 严格下三角和严格上三角部分所组成的矩阵. 考虑求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss-Seidel 迭代算法:

$$x^{k+1}=(D-L)^{-1}Ux^k+(D-L)^{-1}b,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

其中 $x^0\in R^n$ 为给定的初值. 则对任何 x^0, 下述条件 (a) 和 (b) 均是 Gauss-Seidel 迭代算法收敛的充分条件:

(a) $A\in R^{n\times n}$ 是严格对角占优矩阵; (b) $A\in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵.