中国科学院数学与系统科学研究院

2007 年招收攻读博士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 计算方法

考生须知:

1. 本试卷满分 100 分, 全部考试时间总计 180 分钟.
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上一律无效.

*****(试题内容)

1. 设 $A, B \in R^{n\times n}$ 为实矩阵, $x \in R^n$ 为实向量. 分别用 $(\cdot)^T$, $\lambda(\cdot)$ 和 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示相应矩阵的转置, 特征值集合和迹. 试证明:

(a) 成立

$$\frac{1}{2}\left|\frac{x^T(A+A^T)x}{x^Tx}\right| \le \left(\frac{x^TAA^Tx}{x^Tx}\right)^{1/2},$$

(b) $\lambda((A+B)(A+B)^T) \le 2[\lambda(AA^T)+\lambda(BB^T)]$,

(c) $\sqrt{\mathrm{tr}(AB)} \le \frac{1}{2}[\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)]$, 且等号成立当且仅当 $A=B$ 和 $\mathrm{rank}(A)\le 1$.

2. 设

$$E=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

均为 n 阶矩阵, I 为 n 阶单位矩阵.

(a) 给出矩阵 E 的最小奇异值的下界和最大奇异值的上界的精确估计,

(b) 判断下式的正确性:

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}\left[\lambda - 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi i}{2n-1}\right)\right].$$

若此式正确, 请给出证明, 若不正确, 请给出正确的表达式.

---

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} B & E \\ -E^T & C \end{pmatrix},$$

其中 $B \in R^{p\times p}$ 和 $C \in R^{q\times q}$ 为对称半正定矩阵, $E \in R^{p\times q}$, 且 $p \geq q$. 试就矩阵 B, C 和 E 可能出现的各种情况, 讨论 A 为非奇异矩阵的条件.

4. 设 $A \in R^{n\times n}$ 为对称正定矩阵.

(a) 计算 $f(x) = x^T Ax$ 的导数 $f'(x)$;

(b) 若 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为非零 A 共轭向量系, 则

$$A^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k p_k^T}{p_k^T A p_k}.$$

5. 设 $f : R^n \to R^n$ F- 可微, 有一个不动点 $x^* \in R^n$, 且满足 $\rho(f'(x^*)) < 1$. 则存在 x^* 的开球 $\mathcal{S}_r(x^*)$, 使得对 $\forall x^{(0)} \in \mathcal{S}_r(x^*)$, 由迭代法

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

所产生的序列 $\{x^{(k)}\} \subset \mathcal{S}_r(x^*)$, 且 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$. 这里, $\rho(f'(x^*))$ 表示矩阵 $f'(x^*)$ 的谱半径.

6. 设 $A \in R^{n\times n}$ 且 $A = B - C$. 若 $B^{-1} \geq 0$ 且 $B^{-1}C \geq 0$, 则 $\rho(B^{-1}C) < 1$ 当且仅当 A^{-1} 存在且非负.