中国科学院数学与系统科学研究院

2005 年博士研究生招生试题

（ 3 小时完成，满分 100 分）

考试科目　计算方法　　导师姓名　白中治

1. (20 分)

给出下列概念的定义：

(a) 矩阵 $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ 的符号函数 $\mathrm{sign}(A)$; (5 分)

(b) 矩阵 $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ 和向量 $b \in \mathcal{C}^n$ 的 m 维 Krylov 子空间 $\mathcal{K}_m(A, b)$; (5 分)

(c) M- 矩阵与 H- 矩阵; (5 分)

(d) 矩阵的红 - 黑排序. (5 分)

2. (15 分)

对于线性代数方程组 $Ax = b$, 其中 $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 使得 $H = \frac{1}{2}(A + A^T)$ 对称正定, 且 $b \in \mathcal{R}^n$. 考虑极小残量迭代算法

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中

$$r_k = b - Ax_k, \quad \alpha_k = \frac{(Ar_k, r_k)}{(Ar_k, Ar_k)}.$$

试证明:

$$\|r_{k+1}\|_2 \le \sqrt{1 - \frac{(\lambda_{\min}(H))^2}{\|A\|_2^2}} \cdot \|r_k\|_2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

这里, $\lambda_{\min}(H)$ 表示 H 的最小特征值.

3. (10 分)

给定矩阵 $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 及向量 $y \in \mathcal{R}^n$ 和非零向量 $s \in \mathcal{R}^n$. 定义

$$B = A + \frac{(y - As)s^T}{s^T s}.$$

求证：矩阵 B 是极小化问题

$$\min\{\|X - A\|_F \mid Xs = y\}$$

的唯一解.

4. (25 分)

设 A, B, C D 分别为 $n \times n, n \times r, r \times n, r \times r$ 矩阵，对矩阵

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

证明：

(a) 若 A 非奇异，则 E 非奇异当且仅当 $S = D - CA^{-1}B$ 非奇异；(5 分)

(b) 若 A 奇异，但 秩$(A) = n - r$, 则 E 非奇异当且仅当 B, C 满秩，并且 range(A) $\cap$ range(B) $= \{0\}$, null(A) $\cap$ null(C) $= \{0\}$; (10 分)

(c) 若 A 奇异，但 秩$(A) < n - r$, 则 E 必奇异. (10 分)

5. (20 分)

对矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times n},$$

当 A 对称时，求出 Givens 变换 G, 使得 $G^T AG$ 为对角矩阵；而当 A 非对称时，求出 Givens 变换 G_l 和 G_r, 使得 $G_l A G_r$ 为对角矩阵.

6. (10 分)

对任意给定的向量 $x \in \mathcal{R}^n$, 可用 $n-1$ 个 Givens 变换 $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ 使得 $G_{n-1} G_{n-2} \cdots G_1 x = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 也可以用 1 个 Household 变换 Q 使得 $Qx = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 问：

(i) 一般地，是否有 $\hat{x}_1 = \tilde{x}_1$? 若没有，它们之间到底有何关系？

(ii) Q 与 G 之间有何关系？