中国科学院数学与系统科学研究院

2004 年博士研究生招生试题

分析与代数

（ 3 小时完成，满分 100 分）

一、 (本题 14 分) 设 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$ $(n \geq 1)$, 试证数列 $\{x_n \mid n \geq 1\}$ 收敛，并计算其极限。

二、 (本题 14 分) 设函数 $f : [0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ 连续可微，并且

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty.$$

如果 $f'(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上有界，求证： $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

三、 (本题 10 分) 设三维欧氏空间 $I\!R^3$ 中曲面 S 由球坐标方程

$$r = r(\theta, \varphi),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi$$

给出，求证 S 所围的体积为

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi r^3(\theta, \varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

四、 (本题 12 分) 找出使得两条直线 $y = a_0 + a_1 x$ 和 $y = b_0 + b_1 x$ 相交但不重合的充分必要条件，并在相交的情形下求出交点的坐标。

五、 (本题 14 分) 设 A 、 B 为两个同阶实对称方阵，试证

$$\mathrm{tr}(AB) \leq \frac{1}{2}\Big(\mathrm{tr}(A^2) + \mathrm{tr}(B^2)\Big),$$

其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。

六、 (本题 10 分) 试找出方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + (4-\lambda)x_2 + 7 = 0, \\ (2-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6 - \lambda = 0 \end{cases}$$

相容的 λ 值，并在此情形下求出方程组的通解。

七、 (本题 14 分) 计算如下 $2n$ 阶行列式 D_{2n} 的值：

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \cdots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \cdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix},$$

这里行列式中两条对角线之外的元素均为零.

八、 (本题 12 分) 设数列 $\{x_n \mid n \geq 0\}$ 由递推关系式

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}x_{n-1}$$

$(n \geq 1)$ 给出。给定 x_0 和 x_1 ，试证：

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{2}{5}x_0+\frac{3}{5}x_1.$$