中国科学院数学与系统科学研究院

2004 年博士研究生招生试题

（ 3 小时完成，满分 100 分）

考试科目　计算方法　　导师姓名　白中治

1. (25 分)

设 $A, B \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，$tr(\cdot)$ 表示相应矩阵的迹. 求证:

(a) $tr(AB) > 0$; (5 分)

(b) $\sqrt{tr(AB)} \le \frac{1}{2}(\varepsilon\, tr(A) + \frac{1}{\varepsilon}\, tr(B)), \forall \varepsilon > 0$; (10 分)

(c) $C = A^{-1} + B^{-1} - 4(A+B)^{-1}$ 是对称半正定矩阵. (10 分)

2. (10 分)

给定复矩阵 $C \in \mathcal{C}^{n\times n}$. 若 $C = A + \imath B$, 其中 $A, B \in R^{n\times n}$ 且 $\imath = \sqrt{-1}$. 则

$$C^{-1} = (A + BA^{-1}B)^{-1} - \imath A^{-1}B(A + BA^{-1}B)^{-1}.$$

3. (10 分)

给定对称半正定矩阵 $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$. 若 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $A_{22} \in \mathcal{R}^{m\times m}$, $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n\times m}$, $Y_2 \in \mathcal{R}^{m\times m}$. 设 Y 的秩空间与 A 的零空间相等. 令 $W = \begin{bmatrix} I & Y_1 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}$. 则 $W^T A W = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. (20 分)

设 $L_{21} \in \mathcal{R}^{q\times p}$, I 为单位矩阵，且 $L = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_{21} & I \end{bmatrix}$. 则 $\|L\|_2 = f(\|L_{21}\|_2)$, 其中 $f(t) = \left[1 + \frac{1}{2}t(t + \sqrt{t^2+4})\right]^{\frac{1}{2}}$.

5. (10 分)

设 $D \in \mathcal{C}^{n\times n}$ 为 Hermiaian 正定矩阵，$P \in \mathcal{C}^{n\times n}$ 为正定矩阵. 则 $\rho((\alpha D + P)^{-1}(\alpha D - P)) < 1, \forall \alpha > 0$. 这里，$\rho(\cdot)$ 表示相应矩阵的谱半径.

6. (10 分)

设 $G : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ 为 $\mathcal{R}^n$ 上的压缩映像，I 为 $\mathcal{R}^n$ 上的恒等映像，$F = I - G$. 则 F 为从 $\mathcal{R}^n$ 到 $\mathcal{R}^n$ 上的同胚映像.

7. (15 分)

设 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 满足 $a_{ij} \le 0$ $(i \ne j, i, j = 1, 2, \ldots, n)$. 如果 A 是实正定的，即对于所有的 $x \in \mathcal{R}^n \setminus \{0\}$ 均成立 $x^T Ax > 0$, 则 A 是 M- 矩阵.

8. (附加题，不计分)

For the system of linear equations $Ax = b$, where $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ is a complex matrix and $b \in \mathcal{C}^n$ is a given complex right-hand-side vector, consider the SOR method

$$(D + \omega A_L)x^{(k+1)} = \omega b + [(1-\omega)D - \omega A_U]x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

with the relaxation parameter $\omega \in \mathcal{R}^1 \setminus \{0\}$. Here, D, A_L and A_U are the diagonal, the strictly lower-triangular and the strictly upper-triangular matrices of the matrix A, respectively. Prove the following statements:

(i) A necessary and sufficient condition for the SOR method to be convergent is that $0 < \omega < 2$.

(ii) If A is Hermitian and positive definite, then the SOR method converges for all $x^{(0)} \in \mathcal{C}^n$, all $b \in \mathcal{C}^n$, and all $0 < \omega < 2$ to the unique solution of $Ax = b$.