中国科学院数学与系统科学研究院

2003 年博士研究生招生试题

（满分 50 分）

考试科目　高等代数

1. (20 分)

(a) 已知 n 阶矩阵 A 与 B 满足 $AB = A + B$. 试证： $A - I$ 可逆，其中 I 为 n 阶单位矩阵.

(b) 试证： n 阶实对称矩阵 A 为正定的充要条件为存在 n 阶满秩矩阵 B 使得 $A = B^T B$.

(c) 已知 A 与 B 均为 n 阶实对称正定矩阵. 试问：矩阵 AB 的所有特征值均有正实部吗？若有，请证明；若没有，请举例说明.

(d) 已知 $B = A^5 - 3A^4 + 2A - I$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

I 为二阶单位阵. 试求： B 的特征值与特征向量.

2. (15 分)

试证：二次型 $s = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2$ 之秩为 $n - 1$.

3. (15 分)

设 A 为 $n \times n$ 实对称正定矩阵， B 为 $n \times m$ 实满秩矩阵，且 $n \geq m$. 若令

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix},$$

则矩阵

$$L(\alpha) = (\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - H)(\alpha I + H)^{-1}(\alpha I - S)$$

的谱半经小于 1, 即 $\rho(L(\alpha)) < 1$.