# 中国科学院数学与系统科学研究院

## 2003 年博士研究生招生试题

（ 3 小时完成，满分 100 分 ）

考试科目　计算方法　　导师姓名　白中治

**1.** (30 分)

设 $A \in R^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，具分块形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{11}$ 和 $A_{22}$ 均为方矩阵. 记 $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

**(a)** 写出矩阵 $A$ 的块三角分解; (5 分)

**(b)** 写出矩阵 $A$ 的逆的表达式; (5 分)

**(c)** 证明 $\lambda_{\min}(A) \le \lambda_{\min}(A_{11}) \le \lambda_{\max}(A_{11}) \le \lambda_{\max}(A)$; (10 分)

**(d)** 证明 $\lambda_{\min}(A) \le \lambda_{\min}(S) \le \lambda_{\max}(S) \le \lambda_{\max}(A)$. (10 分)

**2.** (30 分)

设 $H \in R^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，定义范数

$$\begin{aligned} \|z\|_{H^{-1}} &= \max_{v\in R^n\setminus\{0\}} \frac{v^T z}{\|v\|_H}, \qquad \forall z \in R^n, \\ \|v\|_H^2 &= \langle v, v\rangle_H = v^T H v. \end{aligned}$$

设 $H_1 \in R^{n\times n}$, $H_2 \in R^{m\times m}$. 定义矩阵范数

$$\|M\|_{H_1,H_2} = \max_{v\in R^n\setminus\{0\}} \frac{\|Mv\|_{H_2}}{\|v\|_{H_1}}, \qquad \forall M \in R^{m\times n}.$$

证明

(a) $\|M\|_{H_1,H_2^{-1}} = \max_{v\in R^n\setminus\{0\}} \max_{w\in R^m\setminus\{0\}} \frac{w^T M v}{\|v\|_{H_1}\|w\|_{H_2}}$;

(b) $\min_{v\notin \ker(M)} \frac{\|Mv\|_{H_2^{-1}}}{\|v\|_{H_1}} = \min_{v\notin \ker(M)} \max_{w\in R^m\setminus\{0\}} \frac{w^T M v}{\|v\|_{H_1}\|w\|_{H_2}}$;

(c) 当 $m = n$ 时, $\|M^{-1}\|_{H_2^{-1},H_1}^{-1} = \min_{v\in R^n\setminus\{0\}} \max_{w\in R^m\setminus\{0\}} \frac{w^T M v}{\|v\|_{H_1}\|w\|_{H_2}}$.

这里, $\ker(M)$ 为 $M$ 的核空间.

**3.** (30 分)

设 $A \in R^{n\times n}$ 为正定矩阵, $H = \frac{1}{2}(A + A^T)$ 和 $S = \frac{1}{2}(A - A^T)$ 分别为 $A$ 的对称与反对称部分, $\alpha$ 为给定的正常数. 考虑求解线性方程组 $Ax = b$ 的迭代算法

$$\begin{cases} (\alpha I + H)x^{(k+1/2)} &= (\alpha I - S)x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + S)x^{(k+1)} &= (\alpha I - H)x^{(k+1/2)} + b, \end{cases}$$

其中 $x^{(0)}$ 为给定的初值, $I$ 为单位矩阵.

**(a)** 写出上述算法的迭代矩阵 $M(\alpha)$;

**(b)** 求证 $M(\alpha)$ 的谱半径 $\rho(M(\alpha))$ 满足

$$\rho(M(\alpha)) \le \sigma(\alpha) \equiv \max_{\lambda_j \in \lambda(H)} \frac{|\alpha - \lambda_j|}{|\alpha + \lambda_j|} < 1,$$

这里, $\lambda(H)$ 为矩阵 $H$ 的特征值的集合;

**(c)** 如果 $\gamma_{\min}$ 和 $\gamma_{\max}$ 分别为 $H$ 的最小和最大特征值, 则当 $\alpha^* = \sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}$ 时, 有

$$\sigma(\alpha^*) = \frac{\sqrt{\gamma_{\max}} - \sqrt{\gamma_{\min}}}{\sqrt{\gamma_{\max}} + \sqrt{\gamma_{\min}}}.$$

**4.** (10 分)

设 $G : R^n \to R^n$ 为 $R^n$ 上的压缩映像, $I$ 为 $R^n$ 上的恒等映像, $F = I - G$. 则 $F$ 为从 $R^n$ 到 $R^n$ 上的同胚映像.