中国科学院数学与系统科学研究院

2002 年博士研究生招生试题

（ 3 小时完成，满分 100 分）

考试科目　计算方法　　导师姓名　白中治

1. (10 分)

设 $A \in R^{n\times n}$ 为实矩阵. 求证:

(a) $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$.

(b) 如果 B 是 A 的任意子阵，则 $\|B\| \le \|A\|$.

(c) 如果 $A^T = -A$, 则 $I - A$ 非奇异且 $(I - A)^{-1}(I + A)$ 是正交阵.

2. (20 分)

设 $A \in R^{n\times n}$ 为实矩阵， $A = P - Q$ 为矩阵 A 的一个分裂，即 P 为非奇异矩阵. 记 $H = P^{-1}Q$, 并用 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径.

(a) 若 A 是对称正定矩阵， $A = P - Q$ 是 A 的 P- 正则分裂，即 $P + Q$ 是对称正定矩阵，则 $\rho(H) < 1$;

(b) 若 A 是单调矩阵， $A = P - Q$ 是 A 的弱正则分裂，即 $P^{-1} \ge 0$ 且 $P^{-1}Q \ge 0$, 则 $\rho(H) < 1$. 这里，称 A 是单调的，如果 A 非奇异且 $A^{-1} \ge 0$; 称 $A = (a_{ij})$ 是非负的 $(A \ge 0)$, 若 $a_{ij} \ge 0, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

3. (10 分)

讨论 a, b 取什么值时，下列方程组有解，并求解:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 &= 4. \end{cases}$$

4. (20 分)

设 $A \in C^{n\times n}$ 为复矩阵. 若存在酉阵 $Q \in C^{n\times n}$ 使得 $Q^H AQ = D + N$, 则称矩阵 A 具有 Schur 分解. 这里， Q^H 表示矩阵 Q 的共轭转置， $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), N = (n_{ij}) \in C^{n\times n}$ 为严格上三角矩阵. 如果 $\mu \in \lambda(A+E)$, p 是使得 $|N|^p = 0$ 成立的最小正整数，则

$$\min_{\lambda\in\lambda(A)} |\lambda - \mu| \le \max\{\theta, \theta^{1/p}\},$$

其中 $\lambda(A)$ 表示矩阵 A 的特征值的集合， $|N| = (|n_{ij}|)$ 表示矩阵 N 的绝对值， $\theta = \|E\|_2 \sum_{k=0}^{p-1} \|N\|_2^k$.

5. (20 分)

叙述求解对称三对角特征值问题的 '分 – 治' 算法，并给出其理论依据.

6. (20 分)

设 $A \in R^{n\times n}$. 设 D, $-L$ 和 $-U$ 分别为 A 的对角，严格下三角和严格上三角部分所组成的矩阵. 考虑求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代算法:

$$x^{k+1} = (D - L)^{-1}Ux^k + (D - L)^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中 $x^0 \in R^n$ 为给定的初值. 则对任何 x^0, 下述条件 (a) 和 (b) 均是 Gauss-Seidel 迭代算法收敛的充分条件:

(a) $A \in R^{n\times n}$ 是严格对角占优矩阵; (b) $A \in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵.