中国科学院数学与系统科学研究院

2001 年 3 月招收攻读博士学位研究生试题

考试科目　基础数学 (线性代数)　　导师姓名

1. 设 $A, B \in R^{n\times n}$ 为实矩阵. 求证：如果 $AB = 0$, 那么

$$秩(A) + 秩(B) \le n.$$

2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

3. 讨论 a, b 取什么值时，下列方程组有解，并求解：

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 &= 4. \end{cases}$$

4. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx$ 是一个实二次型. 若有 n 维列向量 y, z 使得 $y^TAy > 0$, $z^TAz < 0$. 求证：必存在 n 维列向量 w 使得 $w^TAw = 0$.

5. 设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵, 秩$(A) = 1$. 求证：
(1) $A = xy^T$, 其中 x, y 是 n 维列向量;
(2) $A^2 = kA$, 其中 k 是一常数.