中国科学院计算数学研究所

2000 年招收攻读博士学位研究生试题

(基础数学 - 线性代数部分)

用 I 表示单位矩阵, O 表示零矩阵, m, n, r, s 表示非负整数.

1. 给定分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \eta I & B^T \\ B & O \end{pmatrix} \in R^{(m+n)\times(m+n)}, \qquad n > m,$$

其中 η 为正实数, $B \in R^{m\times n}$ 是秩为 $m - r(r \geq 0)$ 的矩阵. 如果 σ_k 为矩阵 B 的非零奇异值, 则矩阵 A 的 $n + m$ 个特征值的分布如下:

(a) 具有一个 r 重特征值 0;

(b) 具有一个 $n - m + r$ 重特征值 η;

(c) 其余的 $m - r$ 个特征值为 $\frac{1}{2}(\eta \pm \sqrt{4\sigma_k^2 + \eta^2})$, $k = 1, 2, \ldots, m - r$.

这里, 矩阵 B 的非零奇异值定义为矩阵 $(B^T B)$ 或 (BB^T) 的某个非零特征值的平方根.

2. 设 $A^2 - A + I = O$. 问方阵 A 是满秩的还是降秩的? 请说明理由.

3. 计算行列式

$$d = \det \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \gamma) \\ \cos(\alpha - \beta) & 1 & \cos(\beta - \gamma) \\ \cos(\alpha - \gamma) & \cos(\beta - \gamma) & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 设 $D \in R^{n\times n}$ 为对称正定矩阵, $B \in R^{m\times n}$ 为任意矩阵, $C \in R^{m\times m}$ 为对称半正定矩阵, 且使得 $S = (C + BD^{-1}B^T)$ 为非奇异矩阵. 记

$$X = D^{-1} - D^{-1}B^T S^{-1} B D^{-1}.$$

求证: 矩阵 $(D^{\frac{1}{2}} X D^{\frac{1}{2}})$ 的任意特征值 λ 均满足 $0 \leq \lambda \leq 1$.

5. 设 $x_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $s \leq n$. 如果

$$|a_{jj}| > \sum_{1\leq i\leq n, i\neq j} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

则 s 个向量 $x_i (i = 1, 2, \ldots, s)$ 必线性无关.