中国科学院计算数学研究所

2000 年招收攻读博士学位研究生试题

(计算方法)

1. 分别举出一种求解线性代数方程组 $Ax = b$ $(A \in R^{n\times n}, b \in R^n)$ 的松弛迭代法和子空间迭代法，给出其数学描述，各叙述一个收敛定理，并择一证明之.

2. 如果 $A \in R^{n\times n}$ 为非负矩阵，则 A 为不可约的充要条件为 $(I+A)^{n-1} > 0$, 其中 $I \in R^{n\times n}$ 为单位矩阵.

3. 设 $f : R^n \to R^1$ 在 R^n 上 G- 可微， $A \in R^{n\times n}$ 对称正定. 则当

$$2f(x) \le \alpha x^T x + \beta (x^T x)^\delta + \gamma$$

时，方程

$$x = Af'(x)^T + b$$

有解，其中 β 和 γ 为任意常数， $|\delta| < 1, \alpha < \lambda^{-1}$, 而 λ 是 A 的最大特征值.

4. 设 $A = I + uu^T \in R^{n\times n}$, 其中 $u \in R^n$ 满足 $\|u\|_2 = 1$. 给出矩阵 A 的 CHOLESKY 因子的对角元素和次对角元素的显式计算公式.

5. 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是按压缩行存储 (CRS) 方式存放在三维数组 val, ind 和 $rptr$ 中，其中非零元素的值存放在数组 val 中， val 中元素的列指标存放在数组 ind 中，而 val 中每行起始元素的指标存放在数组 $rptr$ 中. 试分别给出计算 $y = Ax$ 和 $y = A^T x$ 的 $Fortran$ (或 C, C_{++}) 子程序.

另外，请给出下面矩阵的 CRS:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

6. 叙述关于非线性代数方程组的 NEWTON 法的 KANTOROVICH 半局部收敛定理.