中国科学院计算数学研究所

2000 年招收攻读博士学位研究生试题

数值线性代数

1. 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为实矩阵. 称 A 为非负矩阵 $(A \geq 0)$, 若 $a_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots, n$. 给定矩阵 $A, B \in R^{n\times n}$, 满足 $0 \leq A \leq B$, 则:

(a) $\rho(A) \leq \rho(B)$, 其中 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径;

(b) $0 \leq A^k \leq B^k, \forall k = 0, 1, 2, \ldots$;

(c) $0 \leq A^T A \leq B^T B$, 其中 $(\cdot)^T$ 表示矩阵的转置.

2. 设 $A_n = I_n + \alpha e e^T$, 其中 I_n 为单位矩阵, $e = (1, 1, \ldots, 1)^T \in R^n$, α 为实常数. 计算: (a) A_n 的 ∞- 条件数 $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$; (b) A_n 的行列式.

3. 设 $A \in C^{n\times n}$ 为正交矩阵, 即 $A^H A = D$, 这里 A^H 表示矩阵 A 的共轭转置, D 是对角矩阵.

(a) 若 D 非奇异, 试求 A^{-1};

(b) 若 D 正定, 试求将 A 变换为酉阵的变换矩阵.

4. 设

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & y^T \\ x & A \end{pmatrix} \in R^{(n+1)\times(n+1)}, \qquad S = A - xy^T/\alpha,$$

其中 $\alpha \neq 0$, $x, y \in R^n$, $A \in R^{n\times n}$. 则

(a) 若 B 是列对角占优矩阵, 则 S 也是列对角占优矩阵;

(b) 若 B 是对称正定矩阵, 则 S 也是对称正定矩阵.

5. 设 $A \in R^{n\times n}$. 设 D, $-L$ 和 $-U$ 分别为 A 的对角, 严格下三角和严格上三角部分所组成的矩阵. 考虑求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代算法:

$$x^{k+1} = (D - L)^{-1} U x^k + (D - L)^{-1} b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中 $x^0 \in R^n$ 为给定的初值. 则对任何 x^0, 下述条件 (a) 和 (b) 均是 Gauss-Seidel 迭代算法收敛的充分条件:

(a) $A \in R^{n\times n}$ 是严格对角占优矩阵;

(b) $A \in R^{n\times n}$ 是对称正定矩阵.