论间断有限元的理论①②

ON THE THEORY OF DISCONTINUOUS FINITE ELEMENTS

有限元法的理论早在60年代前期即已建立[1]，而且对经典的连续元 —— 协调元 —— 的情况来说，这一理论业已发展到相当完整细密的程度，见，例如[2，3]. 有限元方法高度的有效性和普遍性是与它在理论上的牢靠性和彻底性密切联系着的．但是，间断 —— 非协调 —— 有限元的理论则还处在不甚令人满意的状态，尽管也有了若干重要的进展，见，例如[2—5]. 本文是作者在间断有限元的理论基础研究中若干成果的扼要介绍．主要的内容是：间断函数的彭加勒型能量不等式，间断有限元及其用法的强弱分类，强弱两类间断有限元函数空间的嵌入定理，强间断有限元的一般收敛性定理．详细论文[6,7]将随后发表．

1. 彭加勒型能量不等式

人们熟知，经典的彭加勒(Poincaré) 型能量不等式是椭圆型微分方程现代理论的出发点．令人感兴趣的是，它将以何种一般的形式推广到间断函数的场合．

我们将讨论一个平面域 D 上的片段光滑函数，它们的间断点都限于 D 的一个一维子集 T 上；设 T 是由有限多个光滑弧段拼成，这些弧段把 D 分解为有限多个子域. 我们将设所考虑的函数在每个子域内直至其边界上都是充分光滑的．任取直线 L，它与间断集 T 的交集 $T\cap L$ 一定只有有限多个连通区(孤立点或线段)，这个连通区的个数记为 $m(T\cap L)$，而对一切直线 L 所得的上限

$$m(T):=\sup_{L} m(T\cap L)$$

也必是有限的整数，它是间断集 T 分布的密度的某种度量，不妨称之为密度数．

我们将对广义导数与形式导数加以区别，函数 $u(x,y)$ 的广义导数记为 $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$；相应的形式导数则记为 $u_{x^py^q}$，后者在间断集 T(经过适当定向后) 两侧的跃值则记为

$$[u_{x^py^q}]=(u_{x^py^q})^+-(u_{x^py^q})^-.$$

经典的彭加勒不等式可以很自然地推广到当前的境况，它将把间断性适当地考虑进

---

① 本文是作者于1978年10月及11月间应法国国家科学研究中心(*Centre National de la Recherche Scientifique*)及意大利国家科学院(*Accademia Nazionale dei Lincei*)邀请赴法、意讲学稿的一部分．

② 原载于《计算数学》，*Math. Numer. Sinica*，1：4，pp378-385，1979.

去．为明确计，命 D 为标准的三角形域，具有顶点 $(0,0)$，$(0,a)(a,0)$ 命 L 为其斜边，于是有，例如，

$$\int_D u^2 d\sigma \leqslant c_1 a^2 \int_D (u_x^2 + u_y^2) d\sigma + c_2 a^{-2} \left(\int_D u d\sigma \right)^2 + c_3 a m(T) \int_T [u]^2 d\tau, \tag{1}$$

$$\int_L u^2 d\tau \leqslant c_4 a \int_D (u_x^2 + u_y^2) d\sigma + c_5 a^{-1} \left(\int_L u d\tau \right)^2 + c_6 m(T) \int_T [u]^2 d\tau, \tag{2}$$

$$\int_L u^2 d\tau \leqslant c_7 a \int_D (u_x^2 + u_y^2) d\sigma + c_8 a^{-1} \int_D u^2 d\sigma + c_9 m(T) \int_T [u]^2 d\tau. \tag{3}$$

右端诸 c 都是绝对常数．当函数 u 在整个 D 上为光滑时，$[u]_T = 0$，以上右端末项为零，这就回到了经典的彭氏不等式．以上这些以及其它类似的不等式对于高维的更为一般形状的区域也都是成立的．它们将作为间断函数空间的嵌入定理的基础，正如经典的彭氏不等式作为索波列夫(Sobolev) 函数空间的嵌入定理的基础一样．

2. 嵌入定理 —— 索波列夫范数

在区域 Ω(为简明计，设为多边形域) 上求 $2m$ 阶自伴椭圆型方程边界值问题在索波列夫空间 $H^m(\Omega)$ 中的解时，可以采用有限元法．为此，选定一个插值算子 Π，相应地将 Ω 剖分为若干面元 σ，线元 τ，点元 π，这样一个三角剖分记为 h，面元的总体记为 Ω^h，位于 Ω 的边界 Γ 上的线元 τ 的总体记为 Γ^h，位于 Ω 的内部的线元 τ 的总体记为 T^h．对于每一个剖分了的 Ω^h，可以按照算子 Π 构造一个有限元函数空间 $S(\Omega^h)$，其中每个函数都是一个固定次数的分片多项式，它可能的间断都限于集合 T^h 上．通常所谓 m 阶协调元是指所有函数直至其 $m-1$ 阶导数都在 T^h 上连续，即 $S(\Omega^h) \subset C^{m-1}(\Omega)$，于是 $S(\Omega^h) \subset H^m(\Omega)$，在此情况，有限元空间是解空间的一个子空间，经典嵌入定理可以运用，这就不难导致熟知的有限元理论．在非协调元即间断元的情况，上述连续性条件受到破坏，$S(\Omega^h) \not\subset H^m(\Omega)$，有限元空 间不是解空间的子空间，情况就变得困难了．但是，当有限元函数只具有某种弱间断性，也就是上述连续性条件只是轻微地受到破坏(下面再仔细说) 时，对于空间 $S(\Omega^h)$ 仍可建立类似于经典形式的嵌入定理．

对于每个 $\sigma \in \Omega^h$，命 h_σ 表示其直径，h_σ^* 表示其内含的最大圆的直径，命

$$h = \max_{\sigma \in \Omega^h} h_\sigma, \qquad h^* = \min_{\sigma \in \Omega^h} h_\sigma^*$$

这里及以后，为了简便起见，同一符号 h 既表示一个剖分又表示这一剖分的格网参数，其区别是自明的．以下只考虑满足均匀性条件

$$h/h^* \leqslant \text{一个与剖分无关的常数}$$

的剖分族 $\{\Omega^h\}$，这样就避免了单元形状的退化和分割尺寸的过度不均等．相应的 $\{S(\Omega^h)\}$ 则称为均匀的函数空间族．

对于均匀的函数空间族 $\{S(\Omega^h)\}$，可以证明下列不等式：

$$\int_\sigma u_x^2 d\sigma \leqslant c h^{-2} \int_\sigma u^2 d\sigma, \tag{4}$$

$$\int_{\partial\sigma} u^2 d\tau \leqslant c h^{-1} \int_\sigma u^2 d\sigma, \tag{5}$$

$$c_1 h^{-1} d(\Omega) \leqslant m(T^h) \leqslant c_2 h^{-1} d(\Omega), \tag{6}$$

此处 $\partial\sigma$ 为面元 σ 的边界，$d(\Omega)$ 为域 Ω 的直径，$m(T^h)$ 为间断集 T^h 在 Ω 中的密度数，诸常数 c 均与所取函数 u 及剖分 h 无关．由于(6)，不等式(1)，比方说，就成为(适当改变常数)

$$\int_D u^2 d\sigma \leqslant a^2\left[c_1\int_D (u_x^2+u_y^2)d\sigma + c_3 h^{-1}\int_T [u]^2 d\tau\right] + c_2 a^{-2}\left(\int_D u d\sigma\right)^2. \tag{7}$$

对于空间 $S(\Omega^h)$ 可以形式地引进索波列夫式的范数，只须将广义导数代以形式导数，

$$\| u \|_{m,\Omega^h}^2 = \sum_{k=0}^{m} |u|_{k,\Omega^h}^2,$$

此处

$$|u|_{k,\Omega^h} = \sum_{\sigma\in\Omega^h} |u|_{k,\sigma}^2, \qquad |u|_{k,\sigma}^2 = \sum_{p+q=k}\int_\sigma (u_{x^p y^q})^2 d\tau.$$

注意在这样的范数里，间断性是被忽略了．在以下的讨论中，为了方便，对于跃值积分采用下列记号：

$$[u]_{k,T^h}^2 = \sum_{\tau\in T^h}[u]_{k,\tau}^2, \qquad [u]_{k,\tau}^2 = \sum_{p+q=k}\int_\tau [u_{x^p y^q}]^2 d\tau.$$

迄今在实践中采用的一切有限元，无论为连续元或间断元，在相邻单元的边界上总是有公共的节点，这就保证了元函数在跨边界时总有点状的连续性，有点像“藕断丝连”；相应地，即使在间断元的情况，间断跃值总是相当“小”的，其确切意义如下：

定义　均匀函数空间族 $\{S(\Omega^h)\}$ 称为 m 阶弱连续，如果

$$[u]_{k,\tau}^2 \leqslant c h^{2(m-k)-1}|u|_{m,\delta\tau}^2, k=0,1\cdots,m-1, \tag{8}$$

$$\forall\, u\in S(\Omega^h), \forall\, \tau\in T^h, \forall\, \Omega^h.$$

这里 $\delta\tau$ 表示线元 τ 的协边界，即所有以 τ 为一边的面元 σ 的总和，常数 c 只依赖于族而与函数及剖分无关．

在有限元的实践中，事实上解 $2m$ 阶方程只限于 $m=1,2$. 对此上述条件(8)分别简化为

$m=1$ 阶弱间断：

$$[u]_{0,\tau}^2 \leqslant ch|u|_{1,\delta\tau}^2, \tag{9}$$

$m=2$ 阶弱间断：

$$\begin{aligned}&[u]_{0,\tau}^2 \leqslant ch^3|u|_{2,\delta\tau}^2,\\ &[u]_{1,\tau}^2 \leqslant ch|u|_{2,\delta\tau}^2.\end{aligned} \tag{10}$$

不难证明：当有限单元的每个边上至少有一个函数插值节点时就必为 1 阶弱间断的；当每个边上至少有两个函数插值节点和至少一个法导数插值节点时就必为 2 阶弱间断的．由此又可得知，迄今实践上用来求解 2 阶椭圆方程的“膜元”都是 1 阶弱间断的，用来求解 4 阶椭圆方程的“板元”都是 2 阶弱间断的．事实上，上述弱间断的定义正是精确地刻画了有限单元间的有断有连的特点，因此可以期望在此基础上发展起来的理论会有足够的广泛性．

现在不妨回到，例如，不等式(1) 或(7). 对于 $m\geqslant 1$ 阶的弱间断的均匀的函数空间族，由于(4) 及(8)，恒有

$$\int_{T^h}[u]^2 d\tau \leqslant c' h\int_D (u_x^2+u_y^2)^2 d\sigma.$$

这表示能量不等式中的间断跃值的贡献可以吸收于一阶导数的贡献之中，于是适当改变

常数后,(1) 或(7) 就变成

$$\int_D u^2 d\sigma \leqslant c_1 a^2 \int_D (u_x^2 + u_y^2) d\sigma + c_2 a^{-2} \left(\int_D u d\sigma \right)^2, \tag{11}$$

外形上同于经典的彭加勒不等式,间断项已不出现．这就提示了弱间断性在一定意义下是可以忽略的．

在上述基础之上,可以证明下列的嵌入定理．

定理1 设$\{S(\Omega^h)\}$为m阶弱间断的均匀的函数空间族,$\{u_k\}$为函数列,$u_k \in S(\Omega^{h_k})$, $h_k \to 0$.

A. 设 $\| u_k \|_{m,\Omega^{h_k}} \leqslant 1$,于是必有子列$\{u_{k'}\}$及函数$u \in H^{m-1}(\Omega)$,使得

$$\| u_{k'} - u \|_{m-1,\Omega^{h_{k'}}} \to 0.$$

B. 更设 $h_k^{-1}[u_k]_{m-1}, T^{h_k} \to 0$,于是必有 $u \in H^m(\Omega)$ 及

$$u_{k',x^p y^q} \to \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} (L^2(\Omega) \text{ 弱}), \forall\ p + q = m.$$

C. 更设 $|u_k|_{m,\Omega^{h_k}} \to 0$,于是必有 $u \in P^{m-1}(\Omega)$ 及

$$\| u_{k'} - u \|_{m,\Omega^{h_{k'}}} \to 0,$$

这里 $P^{m-1}(\Omega)$ 表示 Ω 上的 $m-1$ 次多项式空间．

这是索波列夫空间的正则嵌入的紧致性定理的一个离散模拟．

定理2 设对于族$\{S(\Omega^h)\}$的假设同于定理1. 更设$\{f_{1,h}, \cdots, f_{n,h}\}$是族$\{S(\Omega^h)\}$上的一族线性泛函组,一致有界于范数 $\| u \|_{m,\Omega^h}$,并且对于 $u \in P^{m-1}(\Omega)$ 而言,$\sum_1^n f_{i,h}^2(u) = 0$ 当且仅当 $u = 0$. 于是范数 $\| u \|_{m,\Omega^h}^2$ 一致等价于

$$\| u \|_{m,\Omega^h}^2 + \sum_1^m f_{i,h}^2(u).$$

这也是索波列夫空间的等价范数定理的一个离散模拟,它保证了椭圆算子的弱间断有限元模型的一致椭圆性．

以上嵌入定理与相应经典定理不同之点在于处理对象是包有不同剖分的空间族,从中要得知不依赖于剖分的一致的收敛性和估计式．

3. 嵌入定理 —— 加罚范数

在空间 $S(\Omega^h)$ 中,除了前述的索波列夫型范数外,还可引进一类更强的范数,其中间断性是被强调了而不是被忽视了．命 $p_0, p_1, \cdots, p_{m-1}$ 是一组预定的正数,定义

$$\| u \|_{m,\Omega^h,p_0,\cdots,p_{m-1}}^2 = \| u \|_{m,\Omega^h}^2 + \sum_{i=0}^{m-1} h^{p_i} [u]_{i,T^h}^2, \tag{12}$$

称之为指数是 $p_0, \cdots, p_{m-1}$ 的惩罚型范数,式中右端末是对于间断性的惩罚项．可以证明,对于 m 阶弱间断的均匀族$\{S(\Omega^h)\}$而言,索波列夫范数 $\| u \|_{m,\Omega^h}$ 一致等价于指数为 $p_0 = \cdots = p_{m-1} = 1$ 的惩罚范数 $\| u \|_{m,\Omega^h,1,\cdots,1}$. 但是,惩罚型范数的主要意义应在于所谓强间断的场合,也就是说,弱间断的条件不被满足或仅部分地被满足而不满足到所要求的阶数．

在间断函数的彭加勒型不等式的基础上,对于均匀的函数空间族$\{S(\Omega^h)\}$,对于惩罚

型模量 $\|u\|_{m,\Omega^h,p_0,\cdots,p_{m-1}}$，不论间断是强还是弱，即不论 m 阶弱间断性条件是否被满足，可以证明下面两个与定理 1,2 相似的嵌入定理．

定理 3 设 $\{S(\Omega^h)\}$ 为均匀族，$\{u_k\}$ 是一个函数列，$u_k\in S(\Omega^{h_k})$，$h_k\to 0$.

A. 设 $p_i>1(i=0,1,\cdots,m-1)$ 以及 $\|u\|_{m,\Omega^{h_k},p_0,\cdots,p_{m-1}}\leqslant 1$，于是必存在一个子列 $\{u_{k'}\}$ 以及 $u\in H(\Omega)$ 使得

$$\|u_{k'}-u\|_{m,\Omega^{h_{k'}},p'_0,\cdots,p'_{m-1}}\to 0,\forall\ p'_i<p_i,i=0,1,\cdots,m-1,$$

以及

$$u_{x^py^q}\to\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^py^q}(L^2(\Omega)\ 弱),\forall\ p+q=m.$$

B. 设 $p_i\geqslant 1(i=0,1,\cdots,m-1)$，$\|u_k\|_{m,\Omega^{h_k},p_0,\cdots,p_{m-1}}\leqslant 1$ 以及

$$|u_k|_{m,\Omega^{h_k}}\to 0,h^{-p_i}[u_k]_{i,T^{h_k}}\to 0,\quad i=0,1,\cdots,m-1,$$

于是必存在一个子序列 $\{u_{k'}\}$ 以及 $u\in P^{m-1}(\Omega)$，使得

$$\|u_{k'}-u\|_{m,\Omega^{h_{k'}},p_0,\cdots,p_{m-1}}\to 0.$$

定理 4 设 $\{S(\Omega^h)\}$ 为均匀族．设 $\{f_{1,h},\cdots,f_{n,h}\}$ 是在族 $\{S(\Omega^h)\}$ 上的一族线性泛函组，对于加罚范数 $\|u\|_{m,\Omega^h p_0,\cdots,p_{m-1}}$，$p_i\geqslant 1$ 一致有界，而且对于 $u\in P^{m-1}(\Omega)$ 而言，$\sum_1^n f_{i,h}^2(u)=0$ 当且仅当 $u=0$. 于是范数 $\|u\|^2_{m,\Omega^h,p_0,\cdots,p_{m-1}}$ 一致等价于

$$|u|^2_{m,\Omega^h}+\sum_{i=1}^n f_{i,h}^2(u).$$

4. 间断有限元的用法与收敛性

以上对于间断有限元引进了弱间断和强间断的概念. 对于弱间断元，由于间断跃值相当小，可以忽略间断而定义索波列夫范数. 对此范数，类似于经典形式的嵌入定理成立. 对于强间断，由于跃值可以很大，就需要正视间断性而引进加罚的范数，对此范数仍有类似的 嵌入定理. 这就启示了，当采用间断有限元来解题时，可以有以下两种（当然还有其它的）处理方法或对策. 设要求解域 Ω 上的 $2m$ 阶变分椭圆问题

定 $u\in H^m(\Omega)$，使 $D(u,v)-F(v)=0,\forall\ v\in H^m(\Omega)$，也就是定 $u\in H^m(\Omega)$ 使

$$J(u)=\frac{1}{2}D(u,u)-F(u)=\min,$$

此处

$$D(u,v)=\int_\Omega\sum_{p+q=m}\sum_{r+s=m}a_{p,q,r,s}\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}\frac{\partial^{r+s}v}{\partial x^r\partial y^s}d\sigma \tag{13}$$

设为椭圆正定，对于 m 阶弱间断元，可以自然地建立离散模型，只须将(13) 中的广义导数代以形式导数，两者之差是集中在间断集 T^h 上的 δ 函数型的奇异函数，它是被略去了．这是习用的方法，可以说是由于间断跃值很小而采用宽容的政策，不妨称之为宽容法．对于不满足 m 阶弱间断性的强间断元，就不能放纵间断而必须采用镇压的政策，这就是引进适当的指数 $p_0,\cdots,p_{m-1}$ 而在离散的双线性泛函中加进对于间断的惩罚项，即

$$D(u,v)\sim D_{h,p_0,\cdots,p_{m-1}}(u,v)=D_h(u,v)$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}h^{-p_i}\sum_{\tau\in T^h}\sum_{r+s=i}\int_\tau[u_{x^ry^s}][v_{x^ry^s}]d\tau. \tag{14}$$

这种镇压即加罚的方法思想可以上溯到柯朗(Courant)，它自然也可用于满足 m 阶弱间断条件的场合．

定理 2 及 4 分别保证了在宽容和加罚的两种处理方法下所得的离散算子的一致椭圆正定性．

关于宽容处理的收敛性问题，已有了不少工作，例如[2,3]．通常是从下列期特兰(Strang) 不等式出发：

$$\|u-u_h\|\leqslant K_0\inf_{v\in s(\Omega^h)}\|u-v\|+K_1\sup_{v\in s(\Omega^h)}|E_h(u,v)|/\|v\|, \tag{15}$$

这里范数应理解为

$$\|*\|=\|*\|_{m,\Omega^h},$$

$$E_h(u,v)=D_h(u-u_h,v)$$

是由间断性引起的误差泛函，其中 u_h 为有限元解．对于泛函(13) 及(14)，$E_h(u,v)$ 作如下形式：

$$E_h(u,v)=\int_{T^h}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r+s=i}A_{is}(u)[v_{x^ry^s}]d\tau, \tag{16}$$

这里 $A_{is}(u)$ 为 $2m-1-r-s$ 阶齐次微分算子．对于宽容处理方法，单凭 m 阶弱间断性尚不足以保证收敛，还需加上所谓分片检查(patch test) 条件[2,3]．在这一方面，作者得到一些比较广泛的收敛性定理，将于另文论述．以下将只讨论加罚处理方法的收敛性．

对于加罚处理，不等式(15) 仍然成立，该处范数应理解为加罚范数

$$\|*\|=\|*\|_{m,\Omega^h,p_0,\cdots,p_{m-1}}$$

而间断误差泛函应改为

$$E_{h,p_0,\cdots,p_{m-1}}(u,v)=D_{h,p_0,\cdots,p_{m-1}}(u-u_h,v).$$

然而，可以证明

$$D_{h,p_0,\cdots,p_{m-1}}(u-u_h,v)=D_h(u-u_h,v),$$

即同于不加罚的情况．对于泛函(13)，(14)，$E_{h,p_0,\cdots,p_m}$ 同于式(16) 的 $E_h(u,v)$．但是，具体误差估计以及收敛行为，在加罚处理的情况是大不同于宽容处理的情况的．

首先讨论不等式(15) 中的"inf" 项，即由有限元插值引起的逼近误差．设插值算子 Π 为 k 次精密，即

$$u=\Pi u,\ \forall\ u\in P^k(\Omega),$$

对于均匀的剖分族，除了通常的在面元 σ 上的误差估计：

$$\|u-\Pi u\|_{m,\sigma}^2\leqslant ch^{2k-2m+2}|u|_{k+1,\sigma}^2,\quad\forall\ u\in H^{k+1}(\Omega)$$

外，还需要得出面元边界 $\partial\sigma$ 上的误差

$$\int_{\partial\sigma}|(u-\Pi u)_{x^ry^s}|^2d\tau\leqslant c_i'h^{2k+1-2i}|u|_{k+1,\sigma}^2,\quad r+s=i,i=0,\cdots,m-1.$$

由此得

$$h^{-p_i}[u-\Pi u]_{i,T^h}^2\leqslant c_ih^{2k+1-2i-p_i}|u|_{k+1,\Omega}^2.$$

因此

$$\text{“inf”} \leqslant \| u - \Pi u \|_{m,\Omega^h,p_0,\cdots,p_{m-1}} \leqslant \{ch^{2k-2m+2} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i h^{2k+1-2i-p_i}\} |u|_{k+1,\Omega}.$$

从而为了保证当 $h \to 0$ 时逼近误差“inf” $\to 0$ 时应取 $k \geqslant m$ 并取 p_i 满足

$$2k + 1 - 2i - p_i > 0 \text{ 即 } p_i < 2k + 1 - 2i. \tag{17}$$

至于间断误差项“sup”，为明确计，不妨取例(13)—(14)，可以得到，对于充分光滑的解 u,

$$\text{“sup”} \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} a_i h^{p_i - 1} \| u \|_{2m-i,\Omega} |v|_{i,\Omega^h}.$$

因此，要保证当 $h \to 0$ 时应取 p_i 满足

$$p_i - 1 > 0 \text{ 即 } p_i > 1. \tag{18}$$

在上述思想基础上，比较(17)与(18)可以证明加罚处理方法的一般性收敛定理.

定理5 对于 $2m$ 阶的椭圆正定问题，当有限元插值算子的精密次数 $k \geqslant m$ 而且加罚指数 p_i 满足 $1 < p_i < 2k - 2i + 1(i = 0,1,\cdots,m-1)$ 时，加罚处理方法恒收敛. 对于足够光滑的解 u 而言，选取 $p_i = k + 1 - i$ 时可以给出最优的收敛阶

$$\| u - u_h \|_{m,\Omega^h,p_0,\cdots,p_{m-1}} = O\left(h^{\frac{k-m+1}{2}}\right).$$

在这一方向上，最早是 Babuška-Zlamal[4] 将完整三次($k = 3$)的 2 阶弱间断板元用加罚处理于板方程($m = 2$)得误差 $O(h^{\frac{k-m+1}{2}}) = O(h)$. 上列定理是一般性的，可以适用于任意性质的强间断元. 令人感兴趣的有，比方说，二次精度的三角形膜元，它是 1 阶连续元，当然更是 1 阶弱间断，但却不是 2 阶弱间断，因此，通常只能作为膜元而不能作为板元. 但在加罚处理时可以作为板元而达到精度 $O(h^{\frac{1}{2}})$，一切 k 次精度($k \geqslant 2$)的膜元可以作为加罚板元而达精度 $O(h^{\frac{k-1}{2}})$.

参考文献

[1] 冯康，基于变分原理的差分格式，应用数学与计算数学 2:4(1965)，237—261.

[2] G. Strang. G. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, N. Y., 1973.

[3] Ciarlet, Lectures on the Finite Element Method, Bombay, 1975.

[4] I. Babuška, M. Zlamal, *SIAM J. Num. Anal.*, 1973

[5] P. Leisant, M. Crouzeix, R. A. I. R. O., 1973.

[6] 冯康，间断有限元函数空间的嵌入定理(待发表).

[7] 冯康，间断有限元方法的收敛性(待发表).

ON THE THEORY OF DISCONTINUOUS FINITE ELEMENTS

Abstract

The theory of finite elements has been established since the early sixties and has been developed to a certain degree of completeness and sophistication for the classical continuous (conforming) case. The theory for the discontinuous (nonconforming) case is still in a less

satisfactory state, alth ough important progress has been made. The present work deals with the theoretic al foundation of the discontinuous finite elements.

In section 1, Poincaré inequalities for discontinuous functions are given. They differ from the classical ones by an additional term of the integral of jump values squared with a constant which measures the density of distribution of discontinuities. On this basis, in sections 2 and 3, injection theorems——discrete analogs of the classical ones——for the discontinuous finite element functions spaces can be established for the case of formal Sobolev norm (discontinuity discarded) as well as for the case of norm containing additional penalty (counting the discontinuity). For the first case, a certain condition of weak discontinuity is imposed and this condition is satisfied practically by all the non-conforming elements now in use. In the second case, the condition of weak discontinuity may be violated, i. e., the discontinuity may be arbitrarily strong. This suggests, among others, two kinds of policy for using discontinuous elements: the policy of tolerance——this is the usual method——in ease of weak discontinuity and the policy of suppression——this is the penalty method——in case of strong discontinuity.

In section 4 a general convergence theorem of the penalty method for solving elliptic equations of order 2m is given to the effect that it is always convergent when the finite element interpolation operator is exact to the degree $k \geqslant m$ and the penalty parameters p_i satisfy $1 < p_i < 2k - 2i + 1, i = 0, 1, \cdots, m-1$. The choice $p_i = k + 1 - i$ gives the best order $O(h^{\frac{k-m+1}{2}})$ of convergence for sufficiently smooth solutions. As a result, all membrane elements of degree of accuracy $k \geqslant 2$ can be used as plate elements with convergence order $O(h^{\frac{k-1}{2}})$.