

有限元方法^①

THE FINITE ELEMENT METHOD

有限元方法是椭圆型方程问题的一类数值解法。它的基础分两个方面：一是变分原理，二是剖分插值。从第一方面看，它是传统的能量法即李兹-加辽金方法的一种变形。从第二方面看则它是差分方法即格网法的一种变形。这是两类方法相结合取长补短而进一步发展的结果，它具有很广泛的适应性，特别适合于几何、物理条件比较复杂的问题，而且便于程序的标准化。§1 介绍与椭圆方程相等的变分原理。§2 介绍剖分插值，重点是三角剖分和相应的线性插值。§3 以典型的二阶椭圆方程问题为例说明有限元离散化的全过程。§4 介绍有限元法的一些应用。至于方法对四阶椭圆方程的推广以及对于众多物理、技术领域的应用则可参考专门的著作。

§1 变分原理

1.1 椭圆方程的变分原理

一般的椭圆型方程边值问题都有适当的变分原理与之等价。作为典型的例子，取平面域 Ω 上的二阶变系数椭圆型方程

$$\Omega: -\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\beta\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f \quad (1.1)$$

这里 $\beta = \beta(x, y) > 0$, $f = f(x, y)$ 都是予给的分布。物理上众多的平衡态和定常态问题都归结这个典型的方程，或其简化了的或推广了的形式，例如弹性膜的平衡，弹性柱体的扭转，定常态的热传导或扩散，静电、磁场，不可压缩无旋流，定常渗流，定常亚声速流等等。

由于方程(1.1)对于导数是二阶的，为了保证唯一解在边界 $\partial\Omega$ 上要给定一个条件。边界条件通常有三种类型

第一类： $u = \bar{u}$

第二类： $\beta\frac{\partial u}{\partial \nu} = q$

第三类： $\beta\frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q$

这里 \bar{u}, q, η 为给定在边界上的分布， β 就是 $\beta(x, y)$ 在边界上的值， $\beta > 0$, ν 为外法向， $\eta \geq 0$ 。在边界的不同区段上可以取不同类型的边界条件。由于第二类边界条件可以看作第三

① 原载于《数值计算方法》，pp569-607，国防工业出版社，1978。

类当 $\eta \equiv 0$ 时的特例,故边界条件一般地可以表为

$$\Gamma_0: u = \bar{u} \quad (1.2)$$

$$\Gamma'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q \quad (1.3)$$

Γ_0 及 Γ'_0 为 $\partial\Omega$ 上互补的两个部分,

$$\partial\Omega = \Gamma_0 + \Gamma'_0.$$

它们本身又可能分解为几个不相连结的区段. 图 1 表示一个复连通域, 边界上打毛的区段为 Γ_0 .

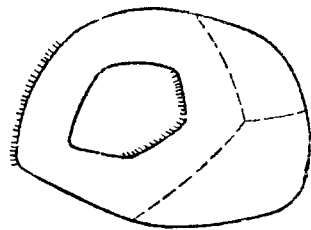


图 1

对应于方程(1.1)和边界条件(1.3)可以构成所谓“能量积分”

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy + \int_{\Gamma_0} \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds \quad (1.4)$$

任取一个函数 $u = u(x, y)$, 有一个积分值 $J(u)$ 与之相应, 因此 $J(u)$ 是“函数的函数”, 可以叫做泛函. 这里 J 二次地依赖于 u (的导数), 因此是一个二次泛函.

重要的事实在于: 由所有满足边界条件

$$\Gamma_0: u = \bar{u}$$

的函数组成的函数类 S 中使得 J 达到极小值的那个函数即极值函数 $u = u(x, y)$ 必定在 Ω 内满足微分方程(1.1) 而且在边界上除了在 Γ_0 上满足(1.2) 以外还在 Γ'_0 上自动满足边界条件(1.3); 反之, 满足(1.1 ~ 1.3) 的函数 $u = u(x, y)$ 也必定是函数类 S 中使得 J 达到极小值的函数. 这就是说变分问题

$$\begin{cases} J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy + \int_{\Gamma_0} \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds = \text{极小} & (1.5) \\ \Gamma_0: u = \bar{u} & (1.6) \end{cases}$$

等价于边值问题

$$\begin{cases} \Omega: - \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f & (1.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q & (1.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_0: u = \bar{u} & (1.9) \end{cases}$$

即两者有相同的解.

这里变分问题的函数类 S 内的函数 u 当然默认有起码的光滑性, 例如具有一阶导数 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 以使积分(1.4) 有意义, 不去细说. 关于等价性, 仅列其论证要点如后, 细节可参考 [1].

设对某函数 $u = u(x, y)$ 给以“变分”即增量 $\delta u = \delta u(x, y)$, 函数从 u 变为 $u + \delta u$, 则相应地 $J(u)$ 变为 $J(u + \delta u)$, 不难用幂次展开的方法算出

$$J(u + \delta u) = J(u) + \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J \quad (1.10)$$

$$\delta J = \iint_{\Omega} \left[\beta \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} - f \delta u \right] dx dy + \int_{\Gamma_0} [\eta u - q] \delta u ds \quad (1.10')$$

$$\frac{1}{2}\delta^2 J = \iint_a \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{r_0} \frac{1}{2} \eta (\delta u)^2 ds \quad (1.10')$$

这里视 δu 为无穷小量, δJ 线性地依赖于 u 又线性地依赖于 δu , 因此为 δu 的同阶无穷小量, 叫做泛函 J 的一次变分. $\delta^2 J$ 不依赖于 u 但二次地依赖于 δu , 因此为 δu 的高阶无穷小量, 叫做 J 的二次变分.

我们要求 u 及 $u + \delta u$ 都属于函数类 S , 即都满足边界条件(1.2), 因此 δu 满足对应于(1.2)的齐次边界条件

$$\Gamma_0; \delta u = 0 \quad (1.11)$$

满足这个边界条件的函数类记为 S_0 . 设 u 是 S 内某个特定函数, 则 S 内的任意函数 v 必可表为 $v = u + \delta u$ 而 $\delta u \in S_0$. 显然, 对于一切 $\delta u \in S_0$ 恒有 $\delta^2 J \geq 0$. 可以证明, 在集合 Γ_0 非空(即确有第一类边界条件点)或者 $\eta \neq 0$ (即确有第三类边界条件点)的情况下, 当 $\delta u \in S_0$ 而相应的 $\delta^2 J = 0$ 时必有 $\delta u \equiv 0$, 这就是说二次变分 $\delta^2 J$ 是正定的(见 1.2 节). 从(1.10)中各项的量级比较, 可以证明, 当二次变分 $\delta^2 J$ 为正定时(或半正定时)(椭圆型问题中绝大多数是这样的), 函数 u 在 S 内使 J 达到极小的充要条件是一次变分 δJ 恒为零, 即

$$\delta J = \delta J(u, \delta u) = 0, \text{ 对一切 } \delta u \in S_0 \quad (1.12)$$

现在来说明(1.12)与(1.7~1.8)等价. 运用高斯积分公式

$$\begin{aligned} & \iint_a \left[\beta \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right] dx dy \\ &= - \iint_a \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta u dx dy + \int_a \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \delta u ds \end{aligned}$$

和边界条件(1.11)可得

$$\delta J = - \iint_a \left[\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} + f \right] \delta u dx dy + \int_{r_0} \left[\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u - q \right] \delta u ds = 0$$

对一切 $\delta u \in S_0$. 由 δu 的任意性可以推出上式两个积分号下的[...]恒为 0, 这就是(1.7~1.8). 反之当(1.7~1.8)成立时(1.12)必也成立, 故(1.12)与(1.7~1.8)等价. 因此变分问题(1.5~1.6)与边值问题(1.7~1.9)等价.

泛函的一次、二次变分实质上是普通多元函数的一次、二次变分的推广. 事实上对于函数 $F(x_1, \dots, x_n)$ 的变元 x_1, \dots, x_n 给以增量 $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ 则有

$$F(x_1 + \delta x_1, \dots, x_n + \delta x_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \delta F + \frac{1}{2} \delta^2 F \quad (1.13)$$

$$\delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 F = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j$$

$\delta F, \delta^2 F$ 便是 F 的一次、二次微分. 在微积分中熟知有极值原理: 当在某点 (x_1, \dots, x_n) 的二次微分 $\delta^2 F$ ——作为 $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ 的二次型为正定(相当于在 (x_1, \dots, x_n) 的二阶导数阵 $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ 为正定矩阵)时, 该点 (x_1, \dots, x_n) 为 F 的极小点的充要条件为

$$\delta F = \delta F(x_1, \dots, x_n; \delta x_1, \dots, \delta x_n) = 0, \text{ 对一切 } \delta x_1, \dots, \delta x_n \quad (1.14)$$

这也等价于

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad (1.15)$$

因此极值问题 $F(x_1, \dots, x_n) = \min$ 等价于解方程组(1.15)的问题. 以上 $\delta J, \delta^2 J$ 分别对应于 $\delta F, \delta^2 F$, (1.12) 对应于(1.14), (1.7~1.8) 对应于(1.15), 而变分问题(1.5~1.6)与边值问题(1.7~1.9)的等价性对应于函数 F 的极值问题与方程组(1.15)的等价性.

上面建立边值问题与变分问题的等价性时用了高斯积分公式, 它仅当有关场量有一定的光滑性才是合法的, 例如当系数 β 为连续函数时就是这样. 当介质系数 β 有间断时, 命其间断线为 L (图1中的虚线), 它把区域 Ω 分割为几个子域, 为简便计, 设分为两块 $\Omega = \Omega^- + \Omega^+$, 在 L 上规定从 Ω^- 指向 Ω^+ 的方向为法线上的方向, 于是

$$\iint_{\Omega} \dots dx dy = \iint_{\Omega^-} \dots dx dy + \iint_{\Omega^+} \dots dx dy$$

在子域 Ω^-, Ω^+ 内场量分别是光滑的, 可以运用高斯积分公式, 由此不难算出

$$\begin{aligned} \delta J = & - \iint_{\Omega-L} \left[\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} + f \right] \delta u dx dy + \iint_L \left[\left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^- \right. \\ & \left. - \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ \right] \delta u ds + \int_{\Gamma_0} \left[\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u - q \right] \delta u ds = 0 \end{aligned}$$

由此可以得出结论: 在介质系数 β 有间断时, 变分问题(1.5~1.6)等价于边值问题

$$\begin{cases} \Omega - L: - \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f \\ L: \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^- - \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ = 0 \\ \Gamma'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (1.16)$$

这里与(1.7~1.9)比较, 多出一个在间断线 L 上的交界条件

$$L: \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^- = \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ \quad (1.17)$$

综上所述, 微分方程(1.11)连同其第二、三类边界条件, 以及介质系数有间断时的交界条件都可以从适当的变分原理导出. 应该注意的是: 在解微分方程时, 第二、三类边界条件以及交界条件都必须作为定解条件列出; 而在解相应的变分问题时, 这些条件被极值函数自动满足, 无须作为定解条件列出, 因此称这类条件为自然边界条件. 反之, 第一类边界条件——如果有的话——在变分问题中与在微分方程问题中一样, 必须作为定解条件列出, 这类条件叫做强加边界条件. 强加边界条件比较简单, 在这里只涉及 u 本身, 而自然边界条件则比较复杂, 涉及到 u 以及法向导数 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, 当边界以及介质间断线的几何形状复杂时, 处理是比较困难的. 此外微分方程(1.11)中含有二阶导数, 变分原理(1.5)中只含有一阶导数. 因此, 直接从变分原理出发来进行离散化和数值解是有利的. 有限元法就是这样, 由于它在离散化时采用了剖分插值方法, 上述有利因素可以得到充分发挥.

变分问题与边值问题的等价性还可以推广到更复杂的情况, 例如

$$\begin{cases} J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \gamma u^2 \right] - fu \right\} dx_1 dx_2 \\ \quad + \int_{\Gamma_0} \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds = \text{极小} \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (1.18)$$

等价于

$$\begin{cases} \Omega - L: - \left(\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \beta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \gamma u = f \\ L: \left(\sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^- - \left(\sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^+ = 0 \\ \Gamma'_0: \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \eta u = q \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (1.19)$$

这里将 x, y 记为 x_1, x_2 , (ν_1, ν_2) 是法向余弦, $\beta_{ij} = \beta_{i,j}(x, y)$ 是对称正定阵, 各向异性的介质系数就是作此形式, L 为系数 β_{ij} 的间断线, $\gamma \geq 0$, 通常反映环境的反作用, 例如在热传导问题中相当于介质与环境之间的热交换系数, 在弹性力学中则相当于基础的弹性系数等等. 可以见到, 这里自然边界条件的形状更复杂, 因此变分原理的有利因素更显著.

将(1.18 ~ 1.19)中的 Ω 理解为三维空间 x_1, x_2, x_3 中的立体, L, Γ_0, Γ'_0 理解为二维面, 求和下标改为 $i, j = 1, 2, 3$, 则问题就推广到三维的情况. 如将 Ω 理解为一维区间, Γ_0, Γ'_0 理解为边界点, L 为 Ω 内部的离散点, $i, j = 1$, 问题便简化为一维的, 即

$$\begin{cases} J(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \gamma u^2 \right] - fu \right\} dx + \sum_{\Gamma'_0} \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] = \text{极小} \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (1.20)$$

等价于

$$\begin{cases} \Omega - L: - \frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = f \\ L: \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^- - \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ = 0 \\ \Gamma'_0: \epsilon \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \eta u = q \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (1.21)$$

这里 ϵ 在右边界上为 $+1$, 在左边界上为 -1 .

1.2 关于变分问题的正定性

对于变分问题, 例如(1.5 ~ 1.6), 我们说二次变分 $\delta^2 J$ 是半正定的, 如果

$$\delta^2 J(\delta u) \geq 0, \text{ 对于一切 } \delta u \in S_0 \quad (1.22)$$

当系数 $\beta > 0, \eta \geq 0$ 时, 根据表达式(1.10'') 显然可见(1.22) 成立, 即半正定. 如果除了满足(1.22) 以外还进一步满足

$$\delta u \in S_0, \delta^2 J(\delta u) = 0 \Rightarrow \delta u \equiv 0 \quad (1.23)$$

则称为正定的. 如果这一补充条件不满足, 也就是说存在 $\delta u \in S_0, \delta u \not\equiv 0$ 而能使

$$\delta^2 J(\delta u) = 0$$

则称为退化半正定的.

现在来证明:当满足下列两条件之一时, $\delta^2 J$ 为正定.

(1) $\Gamma_0 \neq \emptyset$ (非空), 即边值问题确有第一类边界条件的区段.

(2) $\eta \neq 0$, 即在 Γ' 上含有区段 $\Gamma_3 \neq \emptyset$ (非空) 使得在 Γ_3 上 $\eta > 0$, 这就是说边值问题确有第三类边界条件的区段.

事实上, 由于表达式(1.10)的积分号下都是正号的平方和, 因此当 $\delta^2 J(\delta u) = 0$ 时必有

$$\frac{\delta}{\delta x} \delta u \equiv \frac{\delta}{\delta y} \delta u = 0 \Rightarrow \delta u \equiv c = \text{常数, 在 } \Omega \text{ 上.}$$

由于 $\delta u \in S_0$, 故由(1)知在 Γ_0 上 $\delta u = 0$, 因此在 Ω 上 $\delta u \equiv c = 0$. 如果(1)不被满足, 则由(2)知在 Γ_3 上 $\delta u = 0$, 因此同样有 $\delta u \equiv c = 0$.

当条件(1), (2)都不满足时实际上就是所谓第二类边值问题. 这就是说 $\Gamma_0 = \emptyset$ (空) 即 $\partial\Omega = \Gamma'$. 并且 $\eta \equiv 0$. 这时变分问题(1.5 ~ 1.6)退化为无条件变分问题

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy - \oint_{\partial\Omega} q u ds = \text{极小} \quad (1.24)$$

函数类 S 与 S_0 一致, 边界上不受约束, 而二次变分简化为

$$\frac{1}{2} \delta^2 J(\delta u) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1.25)$$

等价的边值问题则成为第二类的, 即

$$\begin{cases} \Omega - L: - \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f \\ L: \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^- - \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ = 0 \\ \partial\Omega: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = q \end{cases} \quad (1.26)$$

从上面在条件(1), (2)下正定性的论证中可以看到, 当条件(1), (2)都不成立, 即对于(1.24)的情况, 二次变分是退化的, 即

$$\delta^2 J(\delta u) = 0 \Leftrightarrow \delta u \equiv c = \text{常数}$$

在正定即非退化的情况, 问题(1.5 ~ 1.6) 即(1.16)有唯一解, 而在退化的情况, 问题(1.24) 即(1.26)可以没有解, 有解时也不唯一. 这是一个很大的区别. 在退化的情况, 可以证明:

1. 齐次问题, 即 $f \equiv 0, q \equiv 0$ 的情况, 也就是

$$J(u) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \text{极小} \quad (1.27)$$

或

$$\begin{cases} \Omega - L: - \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \\ L: \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^- - \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ = 0 \\ \partial\Omega: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

有无穷多非零解,可以表为

$$u \equiv c = \text{常数} \quad (1.29)$$

2. 非齐次问题(1.24)或(1.26)有解的充要条件是

$$\iint_{\Omega} f dx dy + \oint_{\partial\Omega} q ds = 0 \quad (1.30)$$

通称为协调条件.当协调条件(1.29)被满足时,非齐次问题(1.24)或(1.26)的通解 u 可以表为一个特解 \bar{u} 和相应齐次问题(1.27)或(1.28)的通解之和,即

$$u = \bar{u} + c \quad (1.31)$$

协调条件(1.30)在物理上是自然的.例如,把(1.26)理解为不受约束的薄膜平衡问题, f, q 为外载荷,条件(1.30)表示外载荷达成平衡,显然只有当外载荷本身达成平衡时,不受约束的薄膜才可能达成平衡.齐次问题的非零解(1.29)相当于刚性位移为不受约束不受载荷的薄膜的平衡位移.

上面所举的变分问题中,二次泛函都是半正定,包括正定或退化,能量 J 所达到的极值是极小值.在有限元方法中大多数实际问题都属此类.但是也有一些实际问题中人们要求的并不是能量 J 达到极小值而只是所谓临界值,这时二次泛函为不定即 $\delta^2 J$ 可以有正值也可以有负值.在微积分中,对于多元函数 $F(x_1, \dots, x_n)$ 满足 $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ 的点 (x_1, \dots, x_n) 的点叫做临界点(或逗留点),相应的 F 值叫做临界值(或逗留值),而不论二阶导数阵 $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ 是否正定,故临界值可以是极小值,也可以是极大值,也可能都不是.类似地,我们说 $J(u)$ 在函数类 S 中达到临界(或逗留)是指其一次变分恒为零,即(1.12)成立而不论二次变分 $\delta^2 J$ 是否正定或半正定.在我们所讨论的典型例中,变分问题与边值问题的等价性主要是通过临界性建立起来的.不过由于二次变分的正定性,临界性遂成为极小性.一般说来,变分问题可以根据其二次变分为正定或不定(即 $\delta^2 J$ 对于某些 δu 取正值,对于另一些 δu 取负值)而分为两类.椭圆方程中的势能原理多属于正定型的.椭圆方程中的余能原理以及双曲方程中的最小作用原理等则多属于不定型.正定性对于变分原理的误差估计和收敛性论证是关键,对于离散化后代数问题的解算也是有利的.但在不定的情况下也并不妨碍变分原理的实际运用,这是因为变分原理这套形式工具在计算实践中所起的作用,如边界条件的自动实现以及导数的降阶等方面主要是由临界性带来的,与正定性无关.

§ 2 几何剖分与分片插值

2.1 三角剖分

对于平面区域作剖分时,基本单元可取为三角形、矩形、四边形、曲边的多边形等等或兼而有之.单纯的三角形剖分最简单常用,适应性较强,因此只介绍这一种.

设有平面域 Ω , 如果 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是曲的, 则总可以裁弯取直, 用适当的折线来逼近, 这样 Ω 就近似地代以一个多边形域, 仍记作 Ω .

把多边形域 Ω 剖分为一系列的三角形, 更确切地说, 剖分为点元: A_1, A_2, \dots, A_N .

线元: B_1, B_2, \dots, B_{N_1}

面元: C_1, C_2, \dots, C_{N_2}

N_0, N_1, N_2 为点、线、面元的个数. 面元是三角形, 线元是直线段. 每个面元以三个线元为其边, 也以三个点元为其顶点, 每个线元以两个点元为其端点即顶点. 如果区域 Ω 的内部和边界上的介质系数如 β, η 以及 f, q 有间断性, 则间断的线、点应落在线元和点元上, 也就是说剖分应与问题本有的分割相协调, 图 1 中虚线表示内部的间断线, 图 2 表示对应于图 1 的一个剖分, 其中对应于间断线的线元仍用虚线表示.

如上把点元、线元、面元都标了号并给出

1. 点元坐标 $(x_k, y_k), k = 1, 2, \dots, N_0$;
2. 线元两顶点的编号 $(m_{1k}, m_{2k}), k = 1, 2, \dots, N_1$;
3. 面元三顶点的编号 $(n_{1k}, n_{2k}, n_{3k}), k = 1, 2, \dots, N_2$; 则剖分就完全确定.

对于区域的剖分, 除了如上所述必须与问题的物理条件的划分相协调外, 基本上可以是任意的, 可以在关键或关心的部位加密, 在另外的部位放疏. 这种灵活性是有限元法的一个优点. 但是也要注意: (1) 不要有太“扁”的三角形, 即避免出现最小内角接近于 0° 的三角形; (2) 剖分疏密的过渡不要太陡. 不然的话, 会引起离散后代数方程组系数矩阵的病态, 不利于解算, 并且影响到精确度和收敛性.

对平面域 Ω 作三角剖分时, 点、线、面元的个数 N_0, N_1, N_2 一般是任意的, 但它们之间有一定的比例关系. 首先, 有尤拉公式

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1 - p$$

p 为域 Ω 的孔数, 单连通时 $p = 0$; 这一公式不限于三角剖分, 对其它剖分也成立. 它表示, 不论怎样剖分, $N_0 - N_1 + N_2$ 恒不变, 是区域 Ω 的一个拓扑不变量. 此外, 每个三角元以三个线元为边, 每个线元邻接两个(当它在内部时) 或一个(当它在边界上时) 面元, 因此

$$3N_2 = 2N_1 - N'_1$$

N'_1 为边界线元的个数. 在计算实践上, 当剖分较细时, 恒有 $N_1 \gg N'_1, N_0, N_1, N_2 \gg 1 - p$, 因此 $3N_2 \approx 2N_1, N_1 \approx \frac{3}{2}N_2, N_0 - N_1 + N_1 \approx 0, N_0 \approx N_1 - N_2 \approx \frac{2}{3}N_2 - N_2 \approx \frac{1}{2}N_2$, 因此有近似的比例关系

$$N_0 : N_2 : N_1 \approx 1 : 2 : 3$$

它仅对三角剖分成立.

2.2 三角形上的线性插值

在有限元的离散化中, 待解函数 $u(x, y)$ 在各个单元上用适当的插值函数来代替, 最简单的插值方法就是三角形上的线性插值, 不仅它被广泛应用, 同时也是其它三角形上插值方法的基础.

设有任意三角形 $C = (A_1, A_2, A_3)$, 顶点 A_i 的坐标为 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, 设有某函数 $u(x, y)$ 在顶点的值为 $u_i = u(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, 要求作线性函数即一次多项式

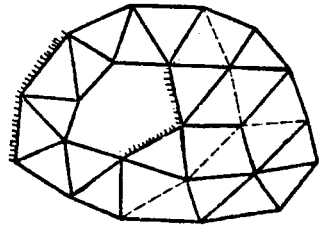


图 2

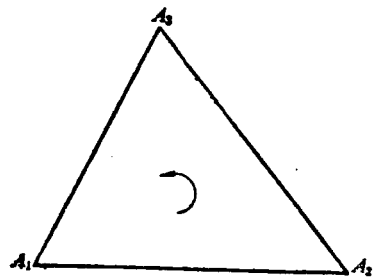


图 3

$$U(x, y) = ax + by + c$$

使得

$$U(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c = u_1$$

$$U(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c = u_2$$

$$U(x_3, y_3) = ax_3 + by_3 + c = u_3$$

为了方便, 在这里以及以后各节恒采用下列统一的记号

$$\xi_1 = x_2 - x_3, \quad \xi_2 = x_3 - x_1, \quad \xi_3 = x_1 - x_2$$

$$\eta_1 = y_2 - y_3, \quad \eta_2 = y_3 - y_1, \quad \eta_3 = y_1 - y_2$$

$$\omega_1 = x_2y_3 - x_3y_2, \quad \omega_2 = x_3y_1 - x_1y_3, \quad \omega_3 = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 = \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad (2.1)$$

$$D_0 = |D|, \quad \epsilon = \text{sign}D = \begin{cases} 1, & \text{当 } D > 0 \\ +1, & \text{当 } D < 0 \end{cases}$$

顺便指出, 当 A_1, A_2, A_3 作逆时针向(如图 3)时 $D > 0$, 作顺时针向时 $D < 0$. 三角形 C 的面积(恒正)为

$$\iint_C dx dy = D_0/2$$

由前列的三个插值方程可以解出

$$a = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} u_1 & y_1 & 1 \\ u_2 & y_2 & 1 \\ u_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \eta_i u_i$$

$$b = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & u_1 & 1 \\ x_2 & u_2 & 1 \\ x_3 & u_3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \xi_i u_i$$

$$c = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & u_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 \omega_i u_i$$

于是

$$U(x, y) = \frac{1}{D} \left(x \sum_{i=1}^3 \eta_i u_i - y \sum_{i=1}^3 \xi_i u_i + \sum_{i=1}^3 \omega_i u_i \right)$$

为了方便, 命

$$\lambda_i(x, y) = (\eta_i x - \xi_i y + \omega_i)/D, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

于是, 以节点值 u_1, u_2, u_3 为基础的线性插值函数 U 可以表为

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i \lambda_i(x, y) \quad (2.3)$$

函数 $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$ 可以称为三角形上线性插值的基函数, 它们本身也是线性函数并满足

$$\lambda_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

顺便指出,当被插函数 $u(x, y)$ 自己是线性函数时,它的三顶点线性插值是准确的,即 $u(x, y) = U(x, y)$. 因此,依次取 $u(x, y) = 1, x, y$ 时即得恒等式

$$1 \equiv \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (2.4)$$

$$x \equiv x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + x_3 \lambda_3 \quad (2.5)$$

$$y \equiv y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 + y_3 \lambda_3 \quad (2.6)$$

基函数 λ_i 是线性的,它们的偏导数是常数

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \lambda_i(x, y) = \eta_i/D \\ \frac{\partial}{\partial y} \lambda_i(x, y) = -\xi_i/D \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 u_i \eta_i/D$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = -\sum_{i=1}^3 u_i \xi_i/D$$

在有限元法计算能量表达式时要用到 λ_i 及其导数的乘积的积分. 根据积分公式(见 2.4 节)

$$\iint_C \lambda_1^{p_1} \lambda_2^{p_2} \lambda_3^{p_3} dx dy = \frac{p_1! p_2! p_3!}{(p_1 + p_2 + p_3 + 2)!} D_0 \quad (2.8)$$

以及(2.7)可以得出下列积分表.

表 1 $\iint_C \varphi \psi dx dy$

$\varphi \backslash \psi$	1	λ_j	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial y}$
1	$D_0/2$			
λ_i	$D_0/6$	$D_0(1 + \delta_{ij})/24$		
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$	$\epsilon \eta_i/2$	$\epsilon \eta_i/6$	$\eta_i \eta_j/2D_0$	
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$	$-\epsilon \xi_i/2$	$-\epsilon \xi_i/6$	$-\xi_i \eta_j/2D_0$	$\xi_i \xi_j/2D_0$

有时,例如对轴对称问题,需要用到如 $\iint \dots dx dy$ 形状的积分,命

$$x_0 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

于是根据(2.8)和同上的方法可以得下表.

表 2 $\iint_C \varphi \psi dx dy$

$\varphi \backslash \psi$	1	λ_j	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial y}$
1	$x_0 D_0/2$			
λ_i	$(3x_0 + x_i)D_0/24$	$(3x_0 + x_i + x_j)D_0(1 + \delta_{ij})/120$		
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$	$\epsilon \eta_i x_0/2$	$\epsilon \eta_i(3x_0 + x_j)/24$	$\eta_i \eta_j x_0/2D_0$	
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$	$-\epsilon \xi_i x_0/2$	$-\epsilon \xi_i(3x_0 + x_j)/24$	$-\xi_i \eta_j x_0/2D_0$	$\xi_i \xi_j x_0/2D_0$

2.3 线元上的线性插值

取三角形 $C = (A_1, A_2, A_3)$ 的一个任意边, 例如线元 $(A_1, A_2) = B$, 命 S 为自 A_1 至 A_2 的弦长变量, C 上的函数 $u(x, y)$, 及其插值 $U(x, y)$ 以及基函数 $\lambda_i(x, y)$ 在 B 的值记为 $u(s), U(s), \lambda_i(s)$; 由于 λ_3 在 A_3 的对边即 (A_1, A_2) 上恒为 0, 故有

$$U(s) = \sum_{i=1}^2 u_i \lambda_i(s) \quad (2.9)$$

因此, 在 B 上, $U(s)$ 就是由 $u(s)$ 在两端的值 u_1, u_2 所产生的线性插值, 与第三个顶点值 u_3 无关. 因此在线元 B 上, 独立地用两顶点的线性插值与以 B 为一边的面元 C 的三顶点线性插值的结果是一致的.

命 L 为线元 B 的长度

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.10)$$

显然有

$$\lambda_1(s) = 1 - \frac{s}{L}, \quad \lambda_2(s) = \frac{s}{L} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial s} = -1/L, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} = 1/L, \quad \text{即} \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial s} = (-1)^i / L \quad (2.12)$$

与三角面元相类似, 在线元 $B = (A_1, A_2)$ 上有下列公式

$$\lambda_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

$$1 \equiv \lambda_1 + \lambda_2$$

$$x \equiv x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2$$

$$y \equiv y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2$$

$$\int_B \lambda_1^{p_1} \lambda_2^{p_2} ds = \frac{p_1! p_2! L}{(p_1 + p_2 + 1)!} \quad (2.13)$$

由此, 并命

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

则得下列积分表.

表 3 $\int_B \varphi \lambda_i ds$

$\varphi \backslash \lambda_i$	1	λ_j	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial s}$
1	L		
λ_i	$L/2$	$L(1 + \delta_{ij})/6$	
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s}$	$(-1)^i$	$(-1)^i/2$	$(-1)^{i+j}/L$

表 4 $\int_B \varphi \lambda_i x ds$

$\varphi \backslash \lambda_i$	1	λ_j	$\frac{\partial \lambda_j}{\partial s}$
1	$x_0 L$		
λ_i	$(2x_0 + x_i)L/6$	$(x_0 + x_i \delta_{ij})L/6$	
$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s}$	$(-1)^i x_0$	$(-1)^i (2x_0 + x_j)/6$	$(-1)^{i+j} x_0 / L$

总结上述, 对于 Ω 上的函数 $u(x, y)$, 按照三角剖分分别在每个面元作线性插值, 它们在相邻面元的公共边及公共点上取相同的值, 因此拼起来得到在 Ω 上的分片线性插值函数 $U(x, y)$, 系由 $u(x, y)$ 在各顶点 A_1, \dots, A_{N_0} 处的值 u_1, \dots, u_{N_0} 决定, $U(x, y)$ 在每个单元(面、线、点)上就是有关顶点 u 值的线性插值. $U(x, y)$ 在 Ω 上整体上是连续函数; 但一阶导数有间断, 实际上是分片常数.

2.4 重心坐标

在三角形 $C = (A_1, A_2, A_3)$ 上作插值和微分运算时, 线性函数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 占有重要地位. 给了一个点 P 的直角坐标 (x, y) , 用公式 (2.2) 可以算出相应的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中只有两个是独立的, 它们满足恒等式 (2.4)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

反之给了满足这一等式的三个数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 则用 (2.5 ~ 2.6) 可以算出相应的 (x, y) . 因此 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 和 (x, y) 一样可以作为坐标, 通常叫做重心坐标. 这是因为, 取三个质量 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 其和为 1, 分别放在顶点 A_1, A_2, A_3 上, 则这个质量系统的重心 $P(x, y)$ 就是

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$$

这就是公式 (2.5 ~ 2.6).

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 也叫做面积坐标. 事实上, 设点 $P = (x, y)$ 位于三角形 $A_1 A_2 A_3$ 之内并设 $A_1 A_2 A_3$ 作逆时针向, 于是 $PA_2 A_3, PA_3 A_1, PA_1 A_2$ 也都作逆时针向 (见图 4), 并有面积公式

$$S_0 = \triangle A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} D$$

$$S_1 = \triangle PA_2 A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\eta_1 x - \xi_1 y + \omega_1) = \lambda_1 S_0$$

$$S_2 = \triangle PA_3 A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\eta_2 x - \xi_2 y + \omega_2) = \lambda_2 S_0$$

$$S_3 = \triangle PA_1 A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\eta_3 x - \xi_3 y + \omega_3) = \lambda_3 S_0$$

因此对应于 $P = (x, y)$ 的 λ_i 就是面积比 $S_i/S_0, i = 1, 2, 3$

$$\lambda_1 = \triangle PA_2 A_3 / \triangle A_1 A_2 A_3, \lambda_2 = \triangle PA_3 A_1 / \triangle A_1 A_2 A_3, \lambda_3 = \triangle PA_1 A_2 / \triangle A_1 A_2 A_3$$

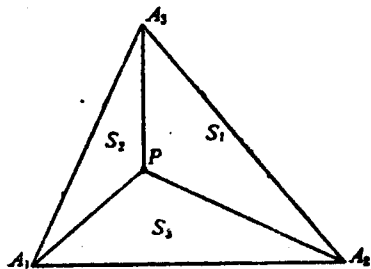


图 4

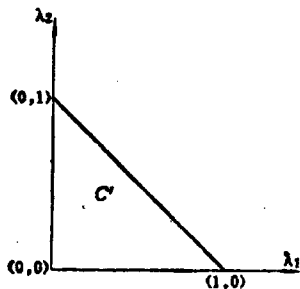


图 5

当点 $P = (x, y)$ 在三角形 C 上变时, 相应的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 的变化范围是

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

在 A_i 的对边上 $\lambda_i = 0 (i = 1, 2, 3)$, A_1, A_2, A_3 的重心坐标则是 $(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)$.

如取 λ_1, λ_2 为独立变量, $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, 则(2.2)把 xy 平面上的三角形 $C = (A_1, A_2, A_3)$ 变为 $\lambda_1 \lambda_2$ 平面上的三角形 $C': 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ 如图 5. 这个变换的导数行列式就是

$$\frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} \eta_1 & -\xi_1 \\ \eta_2 & -\xi_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} = D$$

在三角形上求积分时, 变到重心坐标较方便, 特别当被积函数本身用 C 的重心坐标表示时:

$$\begin{aligned} \iint_C F(\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \lambda_3(x, y)) dx dy &= \iint_{C'} F(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right| d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= D_0 \int_0^1 d\lambda_2 \int_0^{1-\lambda_2} F(\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1 \end{aligned}$$

表 5 三角形上数值积分公式

$\int_C F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) ds = \frac{D_0}{2} \sum_{k=1}^m \rho^{(k)} F(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)}), \frac{D_0}{2} = C$ 的面积			
节点个数 m	节点坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	权数 ρ	精度次数 n
1	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	1	1
3	$\left. \begin{matrix} (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \end{matrix} \right\}$	$\frac{1}{3}$	1
7	$\left. \begin{matrix} (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \end{matrix} \right\}$	$\frac{27}{60}$ $\frac{8}{60}$	3
7	$\left. \begin{matrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \\ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ (\alpha_1, \beta_1, \beta_1) \\ (\beta_1, \alpha_1, \beta_1) \\ (\beta_1, \beta_1, \alpha_1) \\ (\alpha_2, \beta_2, \beta_2) \\ (\beta_2, \alpha_2, \beta_2) \\ (\beta_2, \beta_2, \alpha_2) \end{matrix} \right\}$	$\frac{3}{60}$ 0.225 0.13239415 0.12593918	5
	$\alpha_1 = 0.05961587$ $\beta_1 = 0.47014206$ $\alpha_2 = 0.79742699$ $\beta_2 = 0.10128651$		

据此,并利用尤拉积分

$$\int_0^1 s^m (1-s)^n ds = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

就可以导出公式(2.8).

在有限元法中有时要用三角形上的数值积分,这也可以用重心坐标来表示,其一般形式为

$$\iint_C F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) dx dy = \frac{D_0}{2} \sum_{k=1}^m \rho^{(k)} F(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)})$$

$D_0/2$ 是三角形 C 的面积, $(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)})$ 是一组特定的节点, $\rho^{(k)}$ 是相应的权数. 列举几种常用的公式如表 14.5, 其中精度次数 n 是指公式对于 n 次多项式为准确的.

在线元 $B = (A_1, A_2)$ 上有一个弦长坐标 s (自 A_1 指向 A_2), 两个重心坐标 (λ_1, λ_2) , $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (见 2.3 节). 当点 $P = (s)$ 在 B 上变时, 相应的 (λ_1, λ_2) 的变化范围是

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

A_1, A_2 的重心坐标是 $(1, 0), (0, 1)$. 取 λ_1 为独立变量 $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, 则当 $P = (s)$ 在 B 上变时 λ_1 在区间 $[0, 1]$ 上变; 显然有积分公式

$$\int_B F(\lambda_1(s), \lambda_2(s)) ds = \int_0^1 F(\lambda_1, 1 - \lambda_1) \left| \frac{ds}{d\lambda_1} \right| d\lambda_1 = L \int_0^1 F(\lambda_1, 1 - \lambda_1) d\lambda_1$$

L 为 B 的长度. 据此以及尤拉积分就得积分公式(2.13).

线元上的数值积分公式也可以用重心坐标来表示, 其一般形式为

$$\int_B F(\lambda_1, \lambda_2) ds = L \sum_{k=1}^m \rho^{(k)} F(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)})$$

$(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)})$ 为线元上一组特定的节点, $\rho^{(k)}$ 为相应的权数. 列举几种公式如表 6, 实质上就是普通的辛浦生公式和高斯型公式.

表 6 线元上的数值积分公式

$\int_B F(\lambda_1, \lambda_2) ds = \sum \rho^{(k)} F(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}), L = B$ 的长度			
节点个数 m	节点坐标 (λ_1, λ_2)	权数 ρ	精度次数 n
1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	1
2 $a_1 = 0.2113248654$ $1 - a_1 = 0.7886751346$	$(a_1, 1 - a_1)$ $(1 - a_1, a_1)$	$\frac{1}{2}$	3
3	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(0, 1)$ $(1, 0)$	$\frac{4}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$	3
3 $a_2 = 0.1127016654$ $1 - a_2 = 0.887298334$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(a_2, 1 - a_2)$ $(1 - a_2, a_2)$	$\frac{8}{18}$ $\frac{5}{18}$ $\frac{5}{18}$	5

2.5 三角形上的二次插值

三角形上的三点线性插值是最简单的插值方法,但只有起码的精度.可以构造较高精度的插值,首先就是六点二次插值.

在三角面元 $C = (A_1, A_2, A_3)$ 上取六个点作为插值节点,即三个顶点 A_1, A_2, A_3 ,简记为 1, 2, 3, 以及它们的对边的中点,简记为 4, 5, 6, 恒约定 1 与 4, 2 与 5, 3 与 6 相对,见图 6.

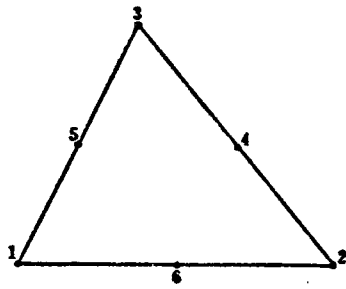


图 6

函数 $u(x, y)$ 在各节点 (x_i, y_i) 的值记为 $u_i, i = 1, \dots, 6$, 要求定出完整的二次多项式

$$U(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

满足

$$U(x_i, y_i) = u_i, \quad i = 1, \dots, 6$$

可以解出六个系数 a_1, \dots, a_6 . 演算从略, 只给出最终的结果如下

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^6 u_i \varphi_i(x, y) \quad (2.14)$$

这里 φ_i 可以通过重心坐标 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 表达

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = 2\lambda_1^2 - \lambda_1, & i = 1, 2, 3 \\ \varphi_4(x, y) = 4\lambda_2\lambda_3, \varphi_5(x, y) = 4\lambda_3\lambda_1, \varphi_6(x, y) = 4\lambda_1\lambda_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

φ_i 都是二次多项式. 如果注意到在 1, 2, 3, 4, 5, 6 各节点的重心坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 为 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, 则容易验证

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

因此公式(2.15)确实就是所要求的二次插值函数.

根据复合微商法则以及 λ_i 的微商公式(2.7)可得 U 及 φ_i 的一阶微商, 它们都是线性的.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{i=1}^6 u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, & \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{i=1}^6 u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \eta_i(4\lambda_i - 1), & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} = 4(\eta_3\lambda_2 + \eta_2\lambda_3), \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = 4(\eta_1\lambda_3 + \eta_3\lambda_1), \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} = 4(\eta_2\lambda_1 + \eta_1\lambda_2) \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = -\xi_i(4\lambda_i - 1), & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} = -4(\xi_3\lambda_2 + \xi_2\lambda_3), \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = -4(\xi_1\lambda_3 + \xi_3\lambda_1), \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} = -4(\xi_2\lambda_1 + \xi_1\lambda_2) \end{cases} \quad (2.16)$$

在三角形 C 的任意边, 例如线元 $B = (A_1, A_2)$ 上, 由于在此边上 $\lambda_3 \equiv 0$, 因此

$$U(s) = u_1\varphi_1(s) + u_2\varphi_2(s) + u_6\varphi_6(s)$$

点 6 就是 A_1A_2 的中点, s 表示自 A_1 至 A_2 的弦长参数(2.3节). 因此, 面元上的二次插值在每个边上的值就是通过该边的三个节点(两个端点, 一个中点)的二次插值而不依赖于位

于此边以外的其它节点的值. 这样, 按三角面元分别作二次插值后, 拼起来得到在 Ω 上分片二次, 整体为连续的函数, 一阶导数为分片一次, 但一般有间断.

将 $B = (A_1, A_2)$ 的两端点记为 1, 2, 并将其中点改记为 3, 于是

$$U(s) = \sum_{i=1}^3 u_i \varphi_i(x) \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \varphi_1(s) = 2\lambda^2 - \lambda, & i = 1, 2 \\ \varphi_3(s) = 4\lambda_1\lambda_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

这里 $\lambda = \lambda(s)$, 见 2.3 节. 相应的导数公式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} &= \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} &= (-1)^i (4\lambda - 1)/L, \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} &= 4(\lambda_1 - \lambda_2)/L \end{aligned} \quad (2.19)$$

将分片二次插值用于有限元法时, 需要插值基函数 φ_i 及其导数的乘积的积分. 可以根据它们的表达式以及积分公式 (2.8)、(2.13) 算出类似于表 1 ~ 4 那样的表格, 但比较庞杂, 故不列. 事实上, 在程序实现时, 宁可采用如 2.4 节中所介绍的数值积分方法, 反而简便, 并且有更大的通用性.

§ 3 变分问题的离散化

我们将以变分问题 (1.5 ~ 1.6) 为例说明能量积分的离散化. 为了说明一般的原则, 不妨把在能量积分中增加“点项”, 即能量积分中同时含有、点、线、面三类项, 这样问题 (1.5 ~ 1.6) 稍微推广为如下的形式

$$\begin{cases} J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy \\ \quad + \int_{\sigma} \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds + \sum_{\sigma'} [-pu] = \text{极小} \\ \Omega_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$(3.2)$$

这里 Ω 就是定解域, 它当然可以表为所有面元之和. $\Omega', \Omega'', \Omega_0 \subset \Omega + \partial\Omega$, 分别表示需要计算能量的线及点的总和. Ω_0 表示施以强加条件的线及点元的总和. $\Omega', \Omega'', \Omega_0$ 可以不仅仅局限在边界 $\partial\Omega$ 上, 而且可以展至 Ω 的内部. 已知系数 $\beta, \eta, f, q, \bar{u}$ 分别定义在有关的部位上. 问题 (1.5 ~ 1.6) 就是 $\Omega' = \Gamma_0, \Omega'' = \text{空}, \Omega_0 = \Gamma_0$ 的特殊情况.

对域 Ω 作三角剖分, 并保证这个剖分与 Ω 原有的分割及系数的间断性相协调, 于是 $J(u)$ 可以分解为有关单元上能量积分之和

$$\begin{aligned} J(u) &= \sum_{C \in \Omega} J_C(u) + \sum_{B \in \Omega'} J_B(u) + \sum_{A \in \Omega''} J_A(u) \\ J_C(u) &= \iint_C \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy \end{aligned}$$

$$J_B(u) = \iint_B \left[\frac{1}{2} \eta_1 u^2 - qu \right] ds$$

$$J_A(u) = \left[\frac{1}{2} \mu u^2 - pu \right]_A$$

在三角剖分(2.1节)的基础上,将未知函数 $u(x, y)$ 代以由它在顶点 A_1, \dots, A_{N_0} 的 u_1, \dots, u_{N_0} 产生的分片线性插值函数 $U(x, y)$, 而 $J(u)$ 代以 $J(U)$, 这一步可以先按单元进行(3.1节)然后累加起来(3.2节).

3.1 单元分析

在各级单元上, u 代以其顶点值的线性插值. 由于剖分与 Ω 由系数的间断性相协调放在每个单元上, 系数 β, f, η, q 等是局部光滑的, 为简便计, 不妨取为常数.

(一) 面元分析 $C = (A_1, A_2, A_3)$

$$u \sim U = \sum_1^3 u_i \lambda_i, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_1^3 u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_1^3 u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$$

$$J_C(u) \sim J_C(U) = \iint_C \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fU \right\} dx dy$$

由于

$$U^2 = \left(\sum_1^3 u_i \lambda_i \right) \left(\sum_1^3 u_j \lambda_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 u_i u_j \lambda_i \lambda_j$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^3 u_i u_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^3 u_i u_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \frac{\partial \lambda_j}{\partial y}$$

因此

$$J_C = J_C(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(C)} u_i u_j - \sum_{i=1}^3 b_i^{(C)} u_i$$

$$a_{ij}^{(C)} = \iint_C \left[\beta \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} + \beta \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial y} + \gamma \lambda_i \lambda_j \right] dx dy$$

$$b_i^{(C)} = \iint_C f \lambda_i dx dy$$

系数 β, γ, f 在 C 上离散成为常数, 于是根据表 1 得到

$$a_{ij}^{(C)} = (\beta \eta_i \eta_j + \beta \xi_i \xi_j) / 2D_0 = a_{ij}^{(C)}$$

$$b_i^{(C)} = fD_0/6$$

对于一些更复杂的问题如(1.18), 面元积分为

$$J_C = \iint_C \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta_{21} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \beta_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \gamma u^2 \right] - fu \right\} dx dy$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}$$

则用类似的方法可以得到

$$a_{ij}^{(C)} = a_{ji}^{(C)} = \iint_C \left[\beta_{11} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} + \beta_{12} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_j}{\partial y} + \beta_{21} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} + \beta_{22} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \frac{\partial \lambda_j}{\partial y} + \gamma \lambda_i \lambda_j \right] dx dy$$

$$= (\beta_{11}\eta_i\eta_j - \beta_{12}\eta_i\xi_j - \beta_{21}\xi_i\eta_j + \beta_{22}\xi_i\xi_j)/2D_0 + \gamma D_0(1 + \delta_{ij})/24$$

$b_i^{(C)}$ 同前.

当 $C = (A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3})$ 即顶点标号为 (n_1, n_2, n_3) 时, 计算 a_{ij}, b_i 的公式中用到的坐标 x_i, y_i 应取为 x_{n_i}, y_{n_i} , 而能量表达式中 u_i 应代为 $u_{n_i}, i = 1, 2, 3$, 因此

$$J_C = J_C(u_{n_1}, u_{n_2}, u_{n_3}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(C)} u_{n_i} u_{n_j} - \sum_{i=1}^3 b_i^{(C)} u_{n_i} \quad (3.3)$$

应该指出, 对于介质系数如 β, \dots 采用分单元的离散化方法事实上就是对于介质间断性的一种自动处理, 不论这种间断性在几何上复杂到什么程度, 只要剖分是协调的, 即把介质间断的点、线元落在剖分的点、线元上, 就自动体现了交界条件(1.17).

(二) 线元分析 $B = (A_1, A_2)$

$$u \sim U = \sum_1^2 u_i \lambda_i, \quad \frac{\partial U}{\partial s} = \sum_1^2 u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial s}$$

$$J_B(u) \sim J_B(U) = \int_B \left[\frac{1}{2} \eta U^2 - qU \right] ds$$

于是

$$J_B = J_B(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^{(B)} u_i u_j - \sum_{i=1}^2 b_i^{(B)} u_i$$

$$a_{ij}^{(B)} = \int_B \eta \lambda_i \lambda_j ds = a_{ij}^{(B)}$$

$$b_i^{(B)} = \int_B q \lambda_i ds$$

系数 η, q 在 B 上取常数值, 故由表 3 得

$$a_{ij}^{(B)} = \eta L(1 + \delta_{ij})/6$$

$$b_i^{(B)} = qL/2$$

在有些问题, 例如本身是一维问题如(1.20), 或者具有复杂结构的问题中, 能量中的线项取如下的形式

$$J_B = \int_B \left\{ \frac{1}{2} \left[\xi \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \eta u^2 \right] - qu \right\} ds = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^{(B)} u_i u_j - \sum_{i=1}^2 b_i^{(B)} u_i$$

这时

$$a_{ij}^{(B)} = \int_B \left[\xi \frac{\partial \lambda_i}{\partial s} \frac{\partial \lambda_j}{\partial s} + \eta \lambda_i \lambda_j \right] ds = (-1)^{i+j} \xi/L + \eta L(1 + \delta_{ij})/6 = a_{ij}^{(B)}$$

$b_i^{(B)}$ 同前.

当 $B = (A_{m_1}, A_{m_2})$ 即顶点标号为 (m_1, m_2) 时, 计算时用到的坐标 x_i, y_i 应取为 x_{m_i}, y_{m_i} , 而 u_i 代为 $u_{m_i}, i = 1, 2$, 因此

$$J_B = J_B(u_{m_1}, u_{m_2}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^{(B)} u_{m_i} u_{m_j} - \sum_{i=1}^2 b_i^{(B)} u_{m_i} \quad (3.4)$$

(三) 点元分析 $A = (A_1)$

在点元 $A = (A_1)$ 上离散化是很显然的. 事实上, 在顶点 A_1 处 $u = u_1, u$ 的线性插值也有 $U = u_1$; 同时, 能量“积分”已经是离散形式的. 因此

$$J_A(u) = [-pu]_A = J_A(U) = J_A(u_1) = \frac{1}{2} a_{11}^{(A)} u_1 u_1 - b_1^{(A)} u_1$$

这里矩阵 $a_{ij}^{(A)}, b_i^{(A)}$ 为一阶的, 均退化为一个数

$$a_{11}^{(A)} = 0$$

$$b_1^{(A)} = p$$

当问题本身是一维问题, 或者在复杂结构的问题中, 能量中的点项作如下形式

$$J_A = \left[\frac{1}{2} \mu u^2 - pu \right]_A = \frac{1}{2} a_{11}^{(A)} u_1 u_1 - b_1^{(A)} u_1$$

这时

$$a_{11}^{(A)} = \mu$$

$$b_1^{(A)} = p$$

当 $A = A_i$ 即该点元的标号为 (i) 时

$$J_A = J_A(u_i) = \frac{1}{2} a_{11}^{(A)} u_i u_i - b_1^{(A)} u_i \quad (3.5)$$

3.2 总体合成

能量积分分单元离散化后, 总体的能量就成为

$$\begin{aligned} J(u) \sim J(U) &= J(u_1, \dots, u_{N_0}) = \sum_{C \in \Omega} J_C + \sum_{A \in \Omega'} J_B + \sum_{A \in \Omega''} J_A \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij} u_i u_j - \sum_{i=1}^{N_0} b_i u_i \end{aligned}$$

它的系数矩阵 $A = (a_{ij}), b = (b_i)$ 可由各单元的系数阵 $a_{ij}^{(C)}, b_i^{(C)}, \dots$ (3.1节) 以适当的方式累加而得。

为此, 在解题开始应具备下列有关剖分的几何量及物理量的信息:

1. 点元的标号和坐标: $(x_k, y_k), k = 1, \dots, N_0$.
2. Ω 中的面元的三顶点标号 (n_1, n_2, n_3) 和相应的系数 $\beta_k, f_k, k = 1, \dots, N_2$.
3. Ω' 中的线元的两顶点标号 (m_1, m_2) 和相应的系数 $\eta_k, q_k, k = 1, \dots, M_1$.
4. Ω'' 中的点元标号 (l_k) 和相应系数 $p_k, k = 1, \dots, M_0$.
5. Ω_0 中的点元标号 (h_k) 和该点的强加值 $\bar{u}_k, k = 1, \dots, M$ (见 3.3 节).

此外, 应根据 3.1 节编出三个标准化的面、线、点单元分析程序, 它们能从单元的几何及物理信息产生单元系数阵。

在这个基础上, 总体系数阵的合成过程如下:

(1) 首先对待定阵 A, b 的全部元素置 0, 即

$$0 \Rightarrow a_{ij}, 0 \Rightarrow b_i \quad i, j = 1, \dots, N_0$$

(2) 对 $C \in \Omega$ 逐个作面元分析, 也就是根据单元顶点序号 n_i 和坐标 $x_{n_i}, y_{n_i} (i = 1, 2, 3)$ 和参数 β, γ, f 算出单元系数 $a_{ij}^{(C)}, b_i^{(C)}$ 并根据 (3.3) 把它们分别累加到总体阵 A, b 的适当部位, 即

$$a_{ij}^{(C)} + a_{n_i n_j} \Rightarrow a_{n_i n_j}, b_i^{(C)} + b_{n_i} \Rightarrow b_{n_i}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

注意这是在既有基础上的累加而不是取代, 不同的单元可以对于同一位置的系数都有贡献。

(3) 对 $B \in \Omega'$ 逐个作线元分析. 由顶点序 m_i 和坐标 x_{m_i}, y_{m_i} 和参数 ξ, η, q 算出线元系数阵 $a_{ij}^{(B)}, b_i^{(B)}$ 再按照 (3.4) 累加

$$a_{ij}^{(B)} + a_{m,m_j} \Rightarrow a_{m,m_j}, b_i^{(B)} + b_{m_i} \Rightarrow b_{m_i}, \quad i, j = 1, 2$$

(4) 对点元 $A \in \Omega''$ 逐个作点元分析, 根据顶点序号 l 及 μ, p 算出 $a_{il}^{(A)}, b_l^{(A)}$ 再按 (3.5) 累加

$$a_{il}^{(A)} + a_{\mu} \Rightarrow a_{\mu}, b_l^{(A)} + b_i \Rightarrow b_i$$

全部单元处理完毕后就得到总体矩阵 A, b , 由于各个单元矩阵 $a_{ij}^{(C)}, a_{ij}^{(B)}, a_{ij}^{(A)}$ 是对称的, 所以总体阵 A 也是对称的,

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, N_0$$

这样能量积分即二次泛函 $J(u)$ 就完全离散化成为多元二次函数

$$J(u_1, \dots, u_{N_0}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij} u_i u_j - \sum_{i=1}^{N_0} b_i u_i \quad (3.6)$$

首先考虑没有强加条件的情况, 即 $\Omega_0 = \phi$ (空集). 这时原问题 (3.1 ~ 3.2) 成为无条件变分问题

$$\text{在函数类 } S \text{ 内定 } u \text{ 使得 } J(u) = \text{极小} \quad (3.7)$$

这里 S 是所有不受强加约束的, 具有一定光滑性使得积分 $J(u)$ 有意义的函数类, 它有无穷多自由度. 离散化后, (3.7) 变成

$$\text{在函数类 } S'' \text{ 内定 } u \text{ 使得 } J(u) = \text{极小} \quad (3.8)$$

这里 S'' 是所有片状线性插值函数所组成的函数类, 是 S 的一个子类, $S' \subset S, S'$ 只有有限多自由度, 即有 N_0 个自由参数 u_1, u_2, \dots, u_{N_0} . 问题 (3.8) 就是多元二次函数 (3.6) 的无条件极小问题即

$$\text{定参数 } u_1, \dots, u_{N_0} \text{ 使得 } J(u_1, \dots, u_{N_0}) = \text{极小} \quad (3.9)$$

根据微积分中的极值原理 (1.13 ~ 1.15), 当二阶导数阵 $\frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_j}$ 正定时, 极小问题 (3.9) 等价于解方程组

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N_0 \quad (3.10)$$

由于 (3.6), J 是二次的, 它的一阶导数是一次的, 即

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} = a_{11} u_1 + \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}) u_2 + \frac{1}{2} (a_{13} + a_{31}) u_3 + \dots - b_1 = \sum_{j=1}^{N_0} a_{1j} u_j - b_1$$

这里利用了对称性 $a_{ij} = a_{ji}$. 一般地有

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} u_j - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, N_0$$

J 的二阶导数则都是常数, 与 u_1, \dots, u_{N_0} 无关:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_j} = a_{ij}$$

因此, 当系数阵 $A = [a_{ij}]$ 为对称正定时, (u_1, \dots, u_{N_0}) 使二次函数 J 达到极小的充要条件是满足线代数方程组

$$\sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} u_j = b_i, \quad i = 1, \dots, N_0 \quad (3.11)$$

即

$$Au = b \quad (3.12)$$

因此变分问题就最终离散化为解线性代数方程组(3.11)的问题,注意方程组的系数阵 A , b 就是能量函数(3.6)中的二次及一次部分的系数阵.

有时,在定出能量函数时可能得出不对称的系数阵 $A = [a_{ij}]$. 由于二次型的系数总可以对称化而型值不变

$$\sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij}u_i u_j \equiv \sum_{i,j=1}^{N_0} \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})u_i u_j$$

那末,极小化的代数方程组的系数阵就不是 $A = [a_{ij}]$ 而是它的对称化

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \left[\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \right]$$

也就是必需经过对称化才能得到正确的代数方程组的系数阵. 如果在单元分析的一级上单元系数阵——“小”矩阵——是对称的(3.1节中就是这样)或进行了对称化,则就能保证总体系数阵——“大”矩阵——的对称性.

由于 J 是二次的,它的二阶以上的偏导数均为零,故有

$$\begin{aligned} J(u_1 + \delta u_1, \dots, u_{N_0} + \delta u_{N_0}) &= J(u_1, \dots, u_{N_0}) + \delta J(u_1, \dots, u_{N_0}; \delta u_1, \dots, \delta u_{N_0}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta^2 J(\delta u_1, \dots, \delta u_{N_0}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

这 $\delta J, \delta^2 J$ 就是函数 J 在点 (u_1, \dots, u_{N_0}) 的一次及二次微分

$$\delta J(u_1, \dots, u_{N_0}; \delta u_1, \dots, \delta u_{N_0}) = \sum_{i=1}^{N_0} \frac{\partial J}{\partial u_i} \delta u_i = \sum_{i=1}^{N_0} \left(\sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} u_j - b_i \right) \delta u_i \quad (3.14)$$

$$\delta^2 J(\delta u_1, \dots, \delta u_{N_0}) = \sum_{i,j=1}^{N_0} \frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j = \sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij} \delta u_i \delta u_j \quad (3.15)$$

从(3.13)中各项的量级对比也可以看出,即使二阶导数阵 $\frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_j} = a_{ij}$ 仅仅是半正定,也就是说

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij} \delta u_i \delta u_j \geq 0, \quad \text{对一切 } \delta u_i, i = 1, \dots, N_0$$

时,极小问题(3.9)也等价于解方程组(3.10)即(3.11).

泛函 $J(u)$ (3.1)的二次变分是(参考1.10)

$$\frac{1}{2} \delta^2 J(\delta u) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \beta \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} \right)^2 dx dy + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \eta (\delta u)^2 ds \quad (3.16)$$

如果命 δu 为由 $\delta u_1, \dots, \delta u_{N_0}$ 产生的分片线性插值函数, $\delta u \in S'$, 则由3.1节、3.2节的离散化方法不难看出,作为函数 $J(u_1, \dots, u_n)$ 的二次微分(3.15)与作为泛函 $J(u)$ 的二次变分是一致的,即

$$\frac{1}{2} \delta^2 J(\delta u) \equiv \frac{1}{2} \delta^2 J(\delta u_1, \dots, \delta u_{N_0}) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij} \delta u_i \delta u_j \quad (3.17)$$

设 $\beta > 0, \eta \geq 0$ 并且 $\eta \neq 0$. 在此情况下在1.2节中已证明了二次变分(3.16)对于函数类 $S = S_0$ 的正定性,因此在其子类 $S' \subset S$ 上当然还是正定的,因此二次型(3.17)正定,即矩阵 $A = [a_{ij}]$ 正定,从而保证线代数方程(3.11)有唯一解.

设 $\beta > 0, \eta \equiv 0$, 这就是所谓第二类边值向. 用1.2中的方法可知二次变分对于 S 为退化半正定,而且

$$\delta^2 J(\delta u) = 0 \Leftrightarrow \delta u \equiv c = \text{常数} \quad (3.18)$$

由于 $\delta u \equiv c \in S_0$, 即相当于用 $\delta u_1 = \cdots = \delta u_{N_0} = c$ 插出的分片线性函数, 所以二次型 (3.17) 也是退化半正定而且

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij} \delta u_i \delta u_j = 0 \Leftrightarrow \delta u_1 = \cdots = \delta u_{N_0} = c \quad (3.19)$$

因此矩阵 A 是退化半正定, 行列式 $|A| = 0$.

对此退化的情况, 按照 1.2 节所述:

1. 齐次问题 —— 即在 (3.1) 中命 $f \equiv 0, q \equiv 0, p \equiv 0$ —— 有非零解

$$u \equiv 1 \quad (3.20)$$

而任意非零解可以表为这个解的常数倍即 $u \equiv c$. 由于这些非零解都含在子函数类 S' 中, 因此离散后对应于 (3.9) 的齐次问题有同样的非零解即

$$u_1 = \cdots = u_{N_0} = 1 \quad (3.21)$$

而任意的非零解可表为它的常数倍, 即 $u_1 = \cdots = u_{N_0} = c$. 注意离散的齐次问题 (3.9) 就是齐次线代数方程

$$\sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} u_j = 0, \quad i = 1, \cdots, N_0 \quad (3.22)$$

2. 非齐次问题 (3.8) 有解的充要条件即所谓协调条件是

$$\iint_{\Omega} f dx dy + \int_{\Omega} q ds + \sum_{\Omega'} p = 0 \quad (3.23)$$

这在物理上相当于外载荷的平衡条件, 是 (1.30) 的推广. 当有解时, 任意两个解必相差一个常数即相差一个齐次问题的解. 在离散化得到退化、对称的线代数方程组 (3.11), 根据线代数的初等理论, (3.11) 有解的充要条件是右项向量 $b = (b_1, \cdots, b_{N_0})$ 与齐次方程组 (3.22) 的基本解向量 —— 现在就是 (3.21) —— 正交, 即

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i = 0 \quad (3.24)$$

这就是代数方程组 (3.11) 的协调条件. 根据 3.1 节、3.2 节的分析方法可知 b_i 是由系数 f, q, p 经离散化而得来的. 问题在于: 当原给的系数 f, q, p 满足协调条件 (3.23) 时, 经过离散化后是否自动保证 (3.24) 成立? 答案是肯定的. 如果在单元分析中涉及 f, q, p 的积分是准确的, 即没有作任何近似, 则可以证明

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i = \iint_{\Omega} f dx dy + \int_{\Omega} q ds + \sum_{\Omega'} p$$

事实上只须取 $u \equiv 1$ 即 $u_i \equiv 1$, 于是根据 (3.1)、(3.6)、(3.19) 即得

$$J(u) = - \int_{\Omega} f dx dy - \int_{\Omega} q ds - \sum_{\Omega'} p = J(u_1, \cdots, u_{N_0}) = - \sum_{i=1}^{N_0} b_i u_i$$

因此原问题的协调条件 (3.23) 自动保证了离散问题 (3.11) 的协调条件 (3.24), 从而保证离散问题有解, 而任意两个解向量的差是一个常向量. 在实践中, 往往对 f, q, p 作近似的处理, 例如取为分片常数, 于是离散化后有可能不严格满足 (3.24), 例如

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i = \varepsilon \neq 0$$

对此可将 b_i 稍修改, 即

$$b_i - \frac{\epsilon}{N_0} \Rightarrow b_i, \quad i = 1, \dots, N_0$$

这样新的右端满足协调条件(3.24), 保证退化方程组有解.

上面的例子说明了, 原变分问题的正定性或退化半正定性以及解的唯一性或多重性结构, 经有限元离散化后, 一般能得到忠实地保持, 这是有限元法的一个优点.

当原问题为正定或半正定时, 离散方程组的解点就是能量函数 $J(u_1, \dots, u_{N_0})$ 的极小点. 当原始变分问题为不定时, 通常所要求的只是能量 J 达到临界, 在离散化后, 系数阵 A 也是不定的, 但所要求的只是能量函数 $J(u_1, \dots, u_{N_0})$ 达到临界, 即 $\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0$. 这时待解的方程组仍然是(3.11), 不过它的解点不一定是 J 的极小点而已.

3.3 强加条件和缝隙的处理

在有强加条件的情况下, 还需要对上面得到的能量系数阵 A, b 作适当的处理后才能得到最终定解的代数方程组.

施以强加条件(3.2)的集合 Ω_0 是一些线元及点元的组合. 在每个线元上 $\bar{u}(s)$ 可以离散化为其两个顶点(设为 A_1, A_2) 的值 \bar{u}_1, \bar{u}_2 的线性插值. 这和在 Ω 上采取的分片线性插值法是协调的. 因此只须对 Ω_0 内所有顶点, 命其序号为 h_1, \dots, h_M 规定条件

$$u_{h_k} = \bar{u}_k, \quad k = 1, \dots, M \quad (3.25)$$

于是变分问题(3.1 ~ 3.2) 就离散化为二次函数 $J(u_1, \dots, u_{N_0})$ 在条件(3.25) 下的极值问题. 注意 J 中一部分变量取已知值, 因此可以视 J 为其余变量的函数, 而原来的条件极值问题就成为对于其余变量的无条件极值问题, 即满足线方程组

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N_0, i \neq h_1, \dots, h_M \quad (3.26)$$

事实上只须从方程组(3.10) 中删去 $i = h_1, \dots, h_M$ 的 M 个方程, 而在余下的方程中代进已知值(3.25) 相应项移到右端, 故得到 $N_0 - M$ 个方程(系数仍然是对称的) 和相同个数的未知数.

另一个等价的办法对原有矩阵 A, b 作下列形式的修改

$$b_i \text{ 修改为 } \begin{cases} \bar{u}_i & \text{当 } i = h_1, \dots, h_M \\ b_i - \sum_{k=1}^M a_{ih_k} \bar{u}_k & \text{当 } i \neq h_1, \dots, h_M \end{cases}$$

$$a_{ij} \text{ 修改为 } \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j, \quad i \text{ 或 } j = h_1, \dots, h_M \\ 1, & \text{当 } i = j, \quad i = h_1, \dots, h_M \end{cases}$$

这样仍为 N_0 个方程(系数也对称) 和 N_0 个未知数, 在程序实现中可以避免由于删去方程和未知数而引起的重新编号的麻烦.

有时强加条件经离散化后不像(3.25) 那样简单而是取如下更一般的形式

$$\sum_{j=1}^{N_0} c_{ij} u_j = d_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (3.27)$$

要求在这个约束条件下函数 $J(u_1, \dots, u_{N_0})$ 的极值. 对此可以采用所谓拉格朗日乘子法. 引进新的变量 $\lambda_1, \dots, \lambda_M$, 作二次函数.

$$G(u_1, \dots, u_{N_0}, \lambda_1, \dots, \lambda_M) = J(u_1, \dots, u_{N_0}) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{N_0} c_{ij} u_j - d_i \right)$$

它有 $N_0 + M$ 个变量. 可以证明, J 的条件极值问题等价于 G 的无条件极值问题. 后者的极值条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial u_i} = 0, & i = 1, \dots, N_0 \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} = 0 & i = 1, \dots, M \end{cases}$$

这就是

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} u_j + \sum_{j=1}^M c_{j\lambda} \lambda_j &= b_i, & i = 1, \dots, N_0 \\ \sum_{j=1}^{N_0} c_{ij} u_j &= d_i, & i = 1, \dots, M \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

也可表为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

这个方法在形式上比较简单, 新的系数矩阵保持了对称性. 但是, 方程组的阶数从 N_0 扩大到 $N_0 + M$, 正定性则不一定能保持.

缝隙的处理

如图 7 所示有时定解区域 Ω 内有缝隙, 缝隙在物理上总是有宽度的, 但当宽度相对地小时, 可以视为无宽度的曲线 L , 有正负两岸 L^+ , L^- . 设想在问题中规定缝隙的两岸都是自由边, 这时泛函 (3.1) 的形式不变, 但 $u(x, y)$ 在两岸互相独立, 可以取不同的值. 当能量达到极小时, 在缝隙两岸自动满足自由边界条件

$$\left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ = 0, \quad \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^- = 0$$

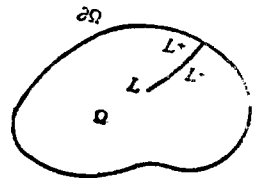


图 7

对于这种情况, 在作剖分时应使缝 L 落在线元上, 缝上的每个点元和线元都一分为二, 变为双重点、双重线, 各有自己的编号, 分别赋有 u 值, 分属于正负两岸, 相同的仅仅是它们的位置坐标. 与缝隙相邻接的面元自然是分属两岸, 应该视为分离的面元, 不再具有公共边. 在解题时, 事实上只需在初始阶段, 即进行剖分和准备相应信息时照上述原则办理, 在以后的阶段就无须再作特殊处理.

3.4 代数计算和结果解释

有限元法离散化后得到线代数组 $Au = b$ 的系数阵 A 总是正定的. 当原始变分问题具有正定性时, 在有限元法中一般也保证系数阵 A 的正定性, 除了由于强加条件的处理有时会有些麻烦. 这种对称正定性的特点保持, 是有限元法的一个优点. 由于对称正定阵的计算方法发展得比较完善, 因此这种特性保持对于方程的解算也是有利的.

有限元法所得的系数阵的另一特点是稀疏性, 即绝大多数的元素为零, 也就是说组中每个方程中只有少数几个特定部位的系数不为 0, 即矩阵基本上是带状的. 事实上, 从 3.1 ~ 3.2 节中可以看出, 每当点元 A_i 与 A_j 不相邻, 即不同属于某个线元或面元时, 在合成后的能量函数中就不出现 $u_i u_j$ 的项, 即相应的矩阵元素 a_{ij} 必为零. 这种稀疏性对于实际解算提供了有利条件, 在程序上可采取压缩零的技巧使得仅仅 A 中的非零元素才被存储, 可以节约存储量和运算量.

针对着系数阵 A 的对称正定性和稀疏性,在实际解算时可以用超松弛法、分块超松弛法或其它类似的迭代法.也可以采用如分块消元法或其它适合稀疏块状结构的直接法.还可以采用迭代法和直接法相结合的共轭斜量法,这也是适合于对称正定和稀疏特点的.

代数计算结束后就得到解在离散点 A_1, \dots, A_{N_0} 的值 u_1, \dots, u_{N_0} . 在实践上常常需要知道导数 $\beta \frac{\partial u}{\partial x}, \beta \frac{\partial u}{\partial y}$ 的分布以及 u 在其它点的值. 因此需要再作一轮单元上的结果分析,即按照原来的插值原则补插算出所需要的量. 例如对于导数,在每个面元 $C = (A_1, A_2, A_3)$ 上按照(2.7)取为

$$\beta \frac{\partial u}{\partial x} = \beta(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3)/D$$

$$\beta \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta(\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2 + \zeta_3 u_3)/D$$

并作为在单元中点的值. 当需要知道在节点处的导数值时则可以取相邻面元中点值的适当的平均值. 特别是利用计算机来显示或制作等值线图或向量场图或其它曲线是非常有利于结果分析的.

3.5 方法的特点

有限元法的特点以及与其它方法的对比可以综述如下:

(1) 有限元法是以变分原理和剖分插值为基础的. 它把在无穷多自由度的函数类 S 中的极值问题代为 S 的一个有限多自由度的子类 S' 中的极值问题,在这点上有限元法是传统的能量法(即李兹-加辽金法)的一种变形. 在传统的能量法中,子类 S' 是由解析函数组成的,缺乏灵活性,而有限元法则是在剖分即格网插值的基础上,来形成子类 S' ,在这点上,它是差分法的一种变形,吸取并发扬了后者的灵活性. 因此有限元法是能量法与差分法相结合而发展了的方法.

(2) 在有限元法中,最终求解的多元二次函数的极值方程,系数阵总是对称的,而且当原始问题为正定时,离散化后一般也保持正定性. 这一特点是能量法中共同的,而在差分法中则不一定总能做到. 有限元系数阵又是稀疏的,这一特点是差分法中共同的,但传统的能量法中则不然. 对称正定与稀疏特性对于数值解算是有利的.

(3) 有限元法的各个环节,如单元分析、总体合成、代数解算、结果解释等等在程序实现上都是便于标准化的. 至少对于同一类型的问题,不论几何形状或物理参数分布如何,不论采用什么插值方法,都可以用同一套标准程序来对付. 对于解题者说来,只须准备有关剖分的几何、物理参数的最低限度的信息即可,这样可以大大缩短解题周期.

(4) 在有限元法中,不论问题是简单或复杂,基本上是同等对待的. 因此,对于规则区域和常系数的问题而言,有限元法的效率会比一般差分法低,但是,随着问题在几何上物理上的复杂性的增高而优点愈显. 有限元法主要是面对这类问题的.

(5) 有限元法利用了变分原理和剖分插值比较成功地解决了自然边界条件的处理问题. 但是,强加条件处理上的矛盾则相对地上升,还有待于改进.

(6) 本文没有讨论有限元法的收敛性问题,即当剖分愈来愈细时,离散解是否愈来愈趋近于真解的问题. 有限元法的基础理论实际上是相当简单的,在相当广泛的范围内,可以确保在能量积分意义下的收敛性,从而保证方法的可靠性. 这也是有限元法的一个特点,见[2].

§ 4 有限元法的一些应用

有限元法对于椭圆型问题是普遍适用的. 在 § 3 中通过平面二阶椭圆方程边值问题的典型例子介绍了基本方法. 本节再介绍在几何上、解析上、物理上有些特点的问题, 如轴对称、本征值和平面弹性问题, 仍用三角形线性插值. 最后介绍提高精度的三角形二次插值. 关于其它的剖分和插值方法, 三维问题, 涉及四阶椭圆方程的板、壳问题, 以及含有时间的动态问题等等则可以参考专门的著作如[3].

4.1 轴对称问题

平面椭圆方程的变分原理(1.18)自然地推广到空间(见 § 1), 变分问题

$$\begin{cases} J(u) = \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy dz \\ \quad + \iint_{\Gamma_0} \left\{ \frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right\} d\sigma = \text{极小} \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases}$$

等价于边值问题

$$\begin{cases} \bar{\Omega} - \bar{L}: - \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \beta \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f \\ \bar{L}: \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^- = \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^+ \\ \bar{\Gamma}'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = q \\ \bar{\Gamma}_0: u = \bar{u} \end{cases}$$

当问题具有轴对称性, 即区域 $\bar{\Omega}$ 及其内外界面 $\bar{L}, \bar{\Gamma}'_0, \bar{\Gamma}_0$ 都是回转体或回转面, 所有的系数 β, η, f, q 都具有回转不变性时, 则解也必具有回转不变性即轴对称性. 这时以采取柱坐标 r, z, φ 为便, 而且一切量与 φ 无关. 可以取一个 $\varphi = 0$ 的参考平面 (r, z) , 其上有二维域 Ω 以及界线 $\partial\Omega, \Gamma_0, \Gamma'_0, L$ 等等, 它们绕 z 轴旋转而生成 $\bar{\Omega}, \partial\bar{\Omega}, \bar{\Gamma}_0, \bar{\Gamma}'_0, \bar{L}$. 由于

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

$$\iiint_{\bar{\Omega}} \dots dx dy dz = \iiint_{\Omega} \dots r dr dz d\varphi = 2\pi \iint_{\Omega} \dots r dr dz$$

$$\iint_{\bar{\Gamma}} \dots d\sigma = \iint_{\Gamma} \dots r ds d\varphi = 2\pi \int_{\Gamma} \dots r ds$$

因此三维变分问题可以表为二维的形式

$$\begin{cases} J(u) = 2\pi \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \beta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - fu \right\} r dr dz \\ \quad + 2\pi \int_{\Gamma_0} \left[\frac{1}{2} r_1 u^2 - qu \right] r ds = \text{极小} \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (4.1)$$

它等价于边值问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega: -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \beta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \beta \frac{\partial u}{\partial z}\right) = f \\ L: \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- = \beta \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ \\ \Gamma'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + r_1 u = q \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

当 $\beta \equiv 1, f \equiv 0$ 就得到

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3)$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (4.4)$$

这就是轴对称下的拉普拉斯方程.

域 Ω 总是位于参考平面即 rz 平面的右半 $r \geq 0$, 它的边线 $\partial\Omega$ 可能不与 z 轴接触(如图 8) 但也能有一部分 Γ_z 在对称轴上, 另一部分 Γ 不在对称轴上(如图 9):

$$\partial\Omega = \Gamma_z + \Gamma$$

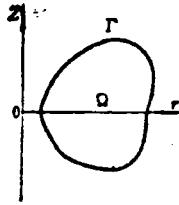


图 8

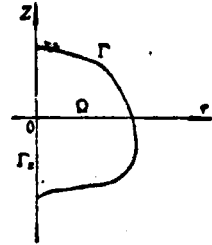


图 9

应该记住, 问题本来的定解域是由 Ω 生成的回转体 $\bar{\Omega}$, 它的边界面 $\partial\bar{\Omega}$ 仅仅是由 Γ 旋转生成的, 与 Γ_z 无关. Γ_z 在对称轴上, 实际上并不构成问题的边界. 因此在 Γ_z 上无边界条件可言, 边界条件仅作用于 Γ , 后者照例又可分为强加的 Γ_0 和自然的 Γ'_0 两个部分:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma'_0$$

从(4.2)、(4.4)看, 由于系数含有因子 $\frac{1}{r}$, 方程在 Γ_z 上即 $r=0$ 处有奇异性. 这在形式化的差分方法中会碰到困难. 但是, 这只是坐标系的奇异性, Γ_z 在回转体 $\bar{\Omega}$ 的内部, 作为三维问题本身在那里并没有奇异性. 当以变分原理(或守恒原理)为基础来离散化时, 上述困难自然地不出现. 这种对于不同坐标系统的适应性也是有限元法的一个优点.

对于平面问题的有限元方法只须稍作修改便可用来解轴对称问题, 为了便于套用既有结果, 把变量 r, z 改记为 x, y , 并且像 3.1 节中一样, 把问题(4.1)稍稍推广为

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} 2\pi x dx dy \\ \quad + \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] 2\pi x ds + \sum_{\Gamma_0} [(-pu) 2\pi x] = \text{极小} \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

在 rz 平面内采用三角剖分和线性插值, 同于 § 2, 不同点只是现在要计算基函数及其导数的乘积以 x 为权的积分, 因此要用 § 2 的表 2, 表 4. 应该记住, 这里的三角面元所代表的实际上是三维空间里具有三角剖面的环体. 相应的单元分析如下

1. 面元 $C = (A_1, A_2, A_3)$

$$J_C = \frac{1}{2} \iint_C \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} 2\pi x dx dy \sim \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(C)} u_i u_j - \sum_{i=1}^3 b_i^{(C)} u_i$$

$$a_{ij}^{(C)} = 2\pi x_0 (\beta \eta_i \eta_j + \beta \xi_i \xi_j) / 2D_0 + 2\pi (3x_0 + x_i + x_j) \gamma D_0 (1 + \delta_{ij}) / 120$$

$$b_i^{(C)} = 2\pi (3x_0 + x_i) f D_0 / 24, x_0 = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$$

2. 线元 $B = (A_1, A_2)$

$$J_B = \int_B \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] 2\pi x ds \sim \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^{(B)} u_i u_j - \sum_{i=1}^2 b_i^{(B)} u_i$$

$$a_{ij}^{(B)} = 2\pi (x_0 + x_i \delta_{ij}) \eta L / 6$$

$$b_i^{(B)} = 2\pi (2x_0 + x_i) q L / 6, x_0 = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)$$

3. 点元 $A = (A_1)$

$$J_A = [(-pu) 2\pi x]_A = \frac{1}{2} a_{11}^{(A)} u_1 u_1 - b_1^{(A)} u_1$$

$$a_{11}^{(A)} = 0$$

$$b_1^{(A)} = 2\pi x_0 p, x_0 = x_1$$

此处 x_1 就是点 A_1 的 x 坐标.

总体合成方法与 3.2 节同.

注意在参考平面 (r, z) 中的面、线、点通过旋转一般地生成三维空间中的回转体、面、线, 即上升一维. 但也有例外, 如原问题中还含有集中于 z 轴上的线源或点源项, 即在能量积分 (4.5) 中再增加线项 $\int (-pu) dz$ 及点项 $\Sigma (-gu)$, 当转化到参考平面中去时, 这些项保持不变, 应该加到能量积分 (4.5) 中去. 注意它们不含有因子 $2\pi r$, 这是因为在 Γ_r 上的点和线经旋转后保持不变, 并不上升一维. 对于 (4.5) 中增添的这些项的处理全同于 3.1 节.

对于轴对称问题还有简化的处理方案, 即单元系数 a_{ij}, b_i 照用 § 3 的公式, 但普遍乘以因子 $2\pi x_0, x_0$ 为每个单元的顶点 x_i (即 r_i) 的算术平均值.

4.2 本征值问题

连续介质振动系统的自振频率和振型问题归结于椭圆方程的本征值问题. 它和边值问题相仿, 也有等价的变分原理, 对此有限元法是同样适用的.

以弹性膜为例, 取 $u(x, y)$ 为平衡态时弹性位移, β 为膜内张力 (给定的系数), f 为载荷分布, 则膜的平衡方程就表为 (1.16) 中的第一式. (1.16) 中的第二、三两式则表达了边界上以及内部交界上的平衡条件, q 表示边界上的线状载荷分布, η 表示边界弹性支承的弹性系数. 在动态时, 命 $w = w(x, y, t)$ 表示弹性位移, 则膜体的运动方程是

$$\Omega: \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial w}{\partial y} \right) = f$$

比平衡方程多了一个惯性力项 $\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $\rho = \rho(x, y)$ 为单位面积的质量, 相应的边界条件仍

旧,即

$$L: \left(\beta \frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^- = \left(\beta \frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^+$$

$$\Gamma'_0: \beta \frac{\partial w}{\partial \nu} + \eta w = q$$

$$\Gamma_0: w = \bar{w}$$

在作自由振动时,所有的载荷及强加条件都为 0,因此方程和边值条件都成为齐次的,即

$$\Omega: \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

$$L: \left(\beta \frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^- = \left(\beta \frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^+$$

$$\Gamma'_0: \beta \frac{\partial w}{\partial \nu} + \eta w = 0$$

$$\Gamma_0: u = 0$$

在形成驻波的时候,解 $w(x, y, t)$ 可以表为

$$w(x, y, t) = e^{i\omega t} u(x, y)$$

ω 为自振频率, $u(x, y)$ 为相应的振型,以此代入上式即得关于 ω 及 u 的方程(命 $\lambda = \omega^2$).

$$\begin{cases} \Omega: -\left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \lambda \rho u \\ L: \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- = \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ \\ \Gamma'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \eta u = 0 \\ \Gamma_0: u = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

这样一组齐次方程显然有解 $u \equiv 0$,但是这种零解在物理上是不感兴趣的.关键在于仅当参数 λ 取某些特定值(叫做本征值)时,这组方程才有非零解——叫做本征函数.所谓本征值问题就是要求定出本征值和相应的本征函数.在这里本征值给出膜的自振频率 $\omega = \sqrt{\lambda}$,相应的本征函数给出振型.

命

$$D(u) = \iint_a \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2} \eta u^2 ds \quad (4.7)$$

$$E(u) = \iint_a \frac{1}{2} \rho u^2 dx dy \quad (4.8)$$

这是两个二次齐次泛函.可以证明,本征值问题(4.6)等价于下列“商”泛函的变分问题[1]

$$\begin{cases} J(u) \equiv \frac{D(u)}{E(u)} = \text{临界值} = \lambda \\ \Gamma_0: u = 0 \end{cases} \quad (4.9) \quad (4.10)$$

这就是说,在一切满足边界条件(4.10)并且不恒为 0 的函数类中使 J 达到临界的函数 u 就是本征函数,相应的值 $J(u)$ 即临界值就是本征值.

按照有限元法,在三角剖分下,通过单元分析和总体合成,二次泛函 D, E 可以分别离散化成为两个二次齐次函数

$$D(u) \sim D(u_1, \dots, u_{N_0}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij} u_i u_j \quad (4.11)$$

$$E(u) \sim E(u_1, \dots, u_{N_0}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N c_{ij} u_i u_j \quad (4.12)$$

如果采用三角部分和线性插值则有单元分析公式(3.1节).

1. 面元 $C = (A_1, A_2, A_3)$

$$D_C(u) = \iint_C \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \sim \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(C)} u_i u_j$$

$$E_C(u) = \iint_C \frac{1}{2} \rho u^2 dx dy \sim \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}^{(C)} u_i u_j$$

$$a_{ij}^{(C)} = \iint_C \left[\beta \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} + \beta \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \frac{\partial \lambda_j}{\partial y} \right] dx dy = (\beta \eta_i \eta_j + \beta \xi_i \xi_j) / 2D_0 = a_{ij}^{(C)}$$

$$c_{ij}^{(C)} = \iint_C \rho \lambda_i \lambda_j dx dy = \rho D_0 (1 + \delta_{ij}) / 24$$

2. 线元 $B = (A_1, A_2)$

$$D_B(u) = \int_B \frac{1}{2} \eta u^2 ds \sim \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^{(B)} u_i u_j$$

$$E_B(u) = 0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 c_{ij}^{(B)} u_i u_j$$

$$a_{ij}^{(B)} = \int_B \eta \lambda_i \lambda_j ds = \rho D_0 (1 + \delta_{ij}) / 24 = a_{ij}^{(B)}$$

$$c_{ij}^{(B)} = 0$$

仿照 3.2 节的原则进行累加就得到两个二次型(4.11 ~ 4.12) 然后按照 3.3 节, 设强加的零边界条件(4.10) 作用于节点 $A_{h_1}, A_{h_2}, \dots, A_{h_M}$, 即

$$u_{h_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.13)$$

从 a_{ij}, c_{ij} 两阵各自删去第 h_1, \dots, h_M 行和相应的列, 同时将变数 u_1, \dots, u_{N_0} 删去相应的分量, 设对余下的各元素按原顺序重新编号, 就得到两个新的二次型(为了方便仍沿用原来的记号)

$$D(u_1, \dots, u_N) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_i u_j, \quad a_{ij} = a_{ij} \quad (4.14)$$

$$E(u_1, \dots, u_N) = \sum_{i,j=1}^N c_{ij} u_i u_j, \quad c_{ij} = c_{ij} \quad (4.15)$$

这里 $N = N_0 - M$, 阵 $A = [a_{ij}]$ 通常为正定或半正定, $C = [c_{ij}]$ 为正定. 于是变分问题(4.9 ~ 4.10) 就离散化成为多元商函数的临界值问题

$$J(u_1, \dots, u_N) \equiv \frac{D(u_1, \dots, u_N)}{E(u_1, \dots, u_N)} = \text{临界值} = \lambda \quad (4.16)$$

所谓 $(u_1, \dots, u_N) \neq 0$ 使 J 达到临界是指 (u_1, \dots, u_N) 满足临界方程

$$\frac{\partial}{\partial u_i} J(u_1, \dots, u_N) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.17)$$

相应的 J 值叫做临界值, 记为 λ_0 由于

$$\frac{\partial}{\partial u_i} J = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{D}{E} \right) = \frac{1}{E^2} \left(\frac{\partial E}{\partial u_i} D - \frac{\partial D}{\partial u_i} E \right)$$

$$= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial u_i} J - \frac{\partial D}{\partial u_i} \right) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial E}{\partial u_i} \lambda - \frac{\partial D}{\partial u_i} \right)$$

并且 $(u_1, \dots, u_N) \neq 0$, 故(4.17) 相应于

$$\frac{\partial E}{\partial u_i} \lambda - \frac{\partial D}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial u_i} D(u_1, \dots, u_N) = \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j, \quad \frac{\partial}{\partial u_i} E(u_1, \dots, u_N) = \sum_{j=1}^N c_{ij} u_j$$

故(4.17) 可以表为

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = \lambda \sum_{j=1}^N c_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.18)$$

用矩阵记号则为

$$Au = \lambda Cu \quad (4.19)$$

这组齐次方程仅当 λ 取一些特定值(叫做本征值) 时才有非零解——叫做本征向量. 这样, 微分方程本征值问题(4.6) 最终离散化为代数本征值问题(4.19). 对于后者有标准的数值解法.

4.3 平面弹性问题

平面弹性问题在物理上有两类, 即平面应变问题和平面应力问题, 两者有统一的数学形式.

设在 x, y 方向的平面位移分布为 $u(x, y), v(x, y)$, 由此派生应变张量 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yx}, \epsilon_{yy}$ 和应力张量 $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.20)$$

应变和应力张量之间有下列关系即虎克定律

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \alpha \epsilon_{xx} + (\alpha - 2\beta) \epsilon_{yy} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + (\alpha - 2\beta) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{yy} = (\alpha - 2\beta) \epsilon_{xx} + \alpha \epsilon_{yy} = (\alpha - 2\beta) \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\beta \epsilon_{xy} = \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

α, β 为介质系数, 可以依赖于 x, y , 甚至可以有间断. 在平面应变问题中

$$\alpha = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \beta = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.22)$$

E 为介质的杨氏模量, ν 为波瓦松比. 在平面应力问题亦即薄板的纵向(板内) 变形问题中

$$\alpha = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad \beta = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \quad (4.23)$$

$h = h(x, y)$ 为板的厚度. 在两种情况下应力张量的物理解释是有所不同的, 在此不去深究.

在平面内任取弧长单元 ds (如图 10 所示), 规定其法向余弦为 ν_x, ν_y , 切向余弦为 $\tau_x = -\nu_y, \tau_y = \nu_x$, 于是位于 ds 正法向一侧通过 ds 作用于负法向一侧的弹性力(以单位长度计) 在 x, y 方向的投影为

$$\nu_x \sigma_{xx} + \nu_y \sigma_{xy}, \quad \nu_x \sigma_{yx} + \nu_y \sigma_{yy} \quad (4.24)$$

在法向及切向的投影则为

$$\sigma_{xx}\nu_x^2 + 2\sigma_{xy}\nu_x\nu_y + \sigma_{yy}\nu_y^2, \quad \sigma_{xx}\nu_x\tau_x + \sigma_{xy}(\nu_x\tau_y + \nu_y\tau_x) + \sigma_{yy}\nu_y\tau_y \quad (4.25)$$

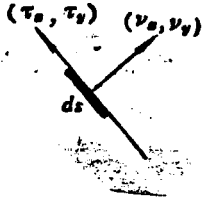


图 10

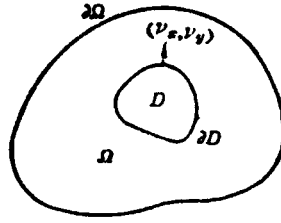


图 11

在弹性体所占的区域 Ω 内任取一个子域 D (图 11), 设在 x, y 方向的平面载荷分布为 f_x, f_y , 于是有

$$\oint_{\partial D} (\nu_x \sigma_{xx} + \nu_y \sigma_{xy}) ds = \iint_D f_x dx dy \quad (4.26)$$

$$\oint_{\partial D} (\nu_x \sigma_{yx} + \nu_y \sigma_{yy}) ds = \iint_D f_y dx dy$$

这就是积分形式的平衡方程, ν_x, ν_y 表示 ∂D 上的外法向余弦. 利用高斯积分公式就可以导出微分形式的平衡方程

$$\Omega_i \begin{cases} -\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right) = f_x \\ -\left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right) = f_y \end{cases} \quad (4.27)$$

这里应力分量 $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$ 用 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 的表达式 (4.21) 代入, 即得到两个未知函数 u, v 的二阶椭圆型方程组. 为了定解, 应在边界 $\partial\Omega$ 给定两个边界条件. 一般地可以把 $\partial\Omega$ 分解为三个互补的部分

$$\partial\Omega = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2$$

在 Γ_0 上, 位移全固定, 取已知的分布

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad (4.28)$$

在 Γ_1 上, 位移半固定. 常见的条件是固定法向位移

$$u_\nu = \nu_x u + \nu_y v = \bar{u}_\nu \quad (4.29)$$

这时还要补充一个切向应力的边界条件, 其一般形式有如

$$\sigma_{xx}\nu_x\tau_x + \sigma_{xy}(\nu_x\tau_y + \nu_y\tau_x) + \sigma_{yy}\nu_y\tau_y = -\eta(\tau_x u + \tau_y v) + q_\tau \quad (4.30)$$

恒约定 ν_x, ν_y 为外法向余弦, $\tau_x = -\nu_y, \tau_y = \nu_x$ 为切向余弦, (ν, τ) 构成一个局部的右手坐标系. 右端 $-\eta(\tau_x u + \tau_y v) = -\eta u_\tau$ 表示切向的弹性反力, 弹性系数 $\eta \geq 0$, q_τ 为线状切向载荷.

在 Γ_2 上, 位移全自由. 这时需要补充两个应力边界条件, 其一般形式有如

$$\begin{aligned} \nu_x \sigma_{xx} + \nu_y \sigma_{xy} &= -(\eta_{xx} u + \eta_{xy} v) + q_x \\ \nu_x \sigma_{yx} + \nu_y \sigma_{yy} &= -(\eta_{yx} v + \eta_{yy} u) + q_y \end{aligned} \quad (4.31)$$

弹性系数 $\eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yx}, \eta_{yy}$ 形成一个对称半正定矩阵, 给 x 及 y 方向的弹性反力, q_x, q_y 为两

个方向的线状载荷.

当介质系数 α, β 有间断时, 在其间断线 L 上通常假定两侧的位移连续

$$u^- = u^+, v^- = v^+ \quad (4.32)$$

这时尚应满足两个交界条件即应力平衡方程

$$\begin{aligned} (\nu_x \sigma_{xx} + \nu_y \sigma_{xy})^- &= (\nu_x \sigma_{xx} + \nu_y \sigma_{xy})^+ \\ (\nu_x \sigma_{yx} + \nu_y \sigma_{yy})^- &= (\nu_x \sigma_{yx} + \nu_y \sigma_{yy})^+ \end{aligned} \quad (4.33)$$

有时在 Ω 内部有缝隙. 有一种是接触的缝隙 L_1 , 在其两侧法向位移连续

$$(\nu_x u + \nu_y v)^- = (\nu_x u + \nu_y v)^+ \quad (4.34)$$

而切向自由, 可有滑移. 这时应满足一个交界条件, 即法向应力平衡

$$(\sigma_{xx} \nu_x^2 + 2\sigma_{xy} \nu_x \nu_y + \sigma_{yy} \nu_y^2)^- = (\sigma_{xx} \nu_x^2 + 2\sigma_{xy} \nu_x \nu_y + \sigma_{yy} \nu_y^2)^+ \quad (4.35)$$

还可以有脱离接触的缝隙 L_2 , 即两侧位移完全自由. 这时应分别满足

$$\begin{aligned} (\nu_x \sigma_{xx} + \nu_y \sigma_{xy})^- &= 0, (\nu_x \sigma_{xx} + \nu_y \sigma_{xy})^+ = 0 \\ (\nu_x \sigma_{yx} + \nu_y \sigma_{yy})^- &= 0, (\nu_x \sigma_{yx} + \nu_y \sigma_{yy})^+ = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

即无应力状态.

以上设缝隙 L_1, L_2 都相当窄, 几何上可以视为相重合.

可以证明, 以上的平衡方程连同其全部边界条件等价于下列变分问题即最小势能原理:

$$\left\{ \begin{aligned} J(u, v) &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} [\alpha(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 + 4\beta(\epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{xx}\epsilon_{yy})] - (f_x u + f_y v) \right\} dx dy \\ &+ \int_{\Gamma_1} \left\{ \frac{1}{2} \eta_r (\tau_x^2 u^2 + 2\tau_x \tau_y uv + \tau_y^2 v^2) - q_r (\tau_x u + \tau_y v) \right\} ds \\ &+ \int_{\Gamma_2} \left\{ \frac{1}{2} (\eta_{xx} u^2 + 2\eta_{xy} uv + \eta_{yy} v^2) - (q_x u + q_y v) \right\} ds = \text{极小} \\ \Gamma_0: u &= \bar{u}, v = \bar{v} \\ \Gamma_1: \nu_x u + \nu_y v &= \bar{u}_r \\ L_1: (\nu_x u + \nu_y v)^- &= (\nu_x u + \nu_y v)^+ \end{aligned} \right. \quad (4.37)$$

注意所有关于应力的边界条件和交界条件都是自然边界条件, 在变分问题中可以不列, 因此情况大大简化. 此外, 在介质间断线 L 上约定位移取单值, 因此位移连续条件(4.30)保证满足, 故不作为强加条件列出. 反之, 在缝隙 L_1, L_2 约定位移取双值, 在 L_1 上有一个约束(4.31), 作为强加条件列出, 在 L_2 上则无约束. 此外, 在 Γ_1 上的积分可以统一为 Γ_2 上的形式, 例如 $\eta_{xx} = \eta_r \tau_x^2, \eta_{xy} = \eta_r \tau_x \tau_y, \eta_{yy} = \eta_r \tau_y^2, q_x = q_r \tau_x, q_y = q_r \tau_y$.

对称性处理

当问题具有一定的对称性时, 可以把定解区域简缩. 应该指出这里有两个变量 u, v , 是同一个位移向量的两个分量. 所谓位移对称性是指位移向量的对称性. 例如说位移左右对称(对称于直线 $x=0$)是指位移向量对于镜射变换 $x \rightarrow -x, y \rightarrow y$ 为不变, 即分量 u 反对称而分量 v 对称(图 12)

$$\begin{aligned} u(-x, y) &= -u(x, y) \\ v(-x, y) &= v(x, y) \end{aligned}$$

见图. 显然可见, 只有当定解区域, 介质系数以及 y 方向的载荷和位移边界条件为左右对称以及 x 方向的载荷和位移边界条件为左右反对称时才能保证位移向量场的左右对称性. 这时定解区间可以简缩一半. 注意对称轴 $x=0$ 本来不是边界而在简缩后成为边界. 在其上由 u, v 的正反对称性得到

$$x=0: u=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

其中第一个 $u=0$ 是强加条件, 在简缩后需要增补为强加增补, 第二个 $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ 是自然边界条件, 不必增补. 一般说来, 在作对称性简缩时, 在对称轴上应增补一个法向位移为零的强加条件.

离散化

仍旧采用三角部分, $u(x, y), v(x, y)$ 在各单元上分别采用线性插值. 为了方便, 将各点元 A_1, A_2, \dots, A_{N_0} 的位移

$$u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{N_0}, v_{N_0}$$

统一记为

$$w_1, w_2, w_3, w_4, \dots, w_{2N_0-1}, w_{2N_0}$$

即

$$u_k = w_{2k-1}, v_k = w_{2k} \quad (4.38)$$

缝隙的处理同于 3.3 节所述, 即缝上的点元和线元都一分为二, 分别给予编号和位移, 仅其几何坐标相同.

1. 面元分析 $C = (A_1, A_2, A_3)$

$$J_C = \iint_C \left\{ \frac{1}{2} [\alpha(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 + 4\beta(\epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{xx}\epsilon_{yy})] - (f_x u + f_y v) \right\} dx dy$$

把积分号下的二次项表为对称形式

$$\begin{aligned} \alpha(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 + 4\beta(\epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{xx}\epsilon_{yy}) &= \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4\beta \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + (\alpha - 2\beta) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &\quad + \beta \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha - 2\beta) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

用线性插值

$$u \sim \sum u_i \lambda_i, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \sum u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim \sum u_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$$

$$v \sim \sum v_i \lambda_i, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \sim \sum v_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \sum v_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial y}$$

α, β, f_x, f_y 均取常数值. 于是

$$J_C \sim \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 [a_{ij}^{(1)} u_i u_j + a_{ij}^{(2)} u_i v_j + a_{ij}^{(3)} v_i u_j + a_{ij}^{(4)} v_i v_j] - \sum_{i=1}^3 [b_i^{(1)} u_i + b_i^{(2)} v_i]$$

$$a_{ij}^{(1)} = a\eta_i \eta_j + b\xi_i \xi_j, \quad a_{ij}^{(2)} = c\eta_i \eta_j + d\xi_i \xi_j,$$

$$a_{ij}^{(3)} = d\eta_i \eta_j + c\xi_i \xi_j, \quad a_{ij}^{(4)} = b\eta_i \eta_j + a\xi_i \xi_j,$$

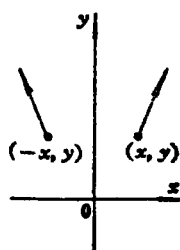


图 12

$$b_i^{(1)} = f_x D_0 / 6 \quad b_i^{(2)} = f_y D_0 / 6$$

$$a = \alpha / 2 D_0, b = \beta / 2 D_0, c = -(\alpha - 2\beta) / 2 D_0, d = -b = -\beta / 2 D_0$$

若 $C = (A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3})$, 顶点标号为 n_i 的位移 u, v 已统一记为 $w_{2n_i-1}, w_{2n_i}, i = 1, 2, 3$, 因此合成累加公式是

$$a_{ij}^{(1)} + a_{2n_i-1, 2n_j-1} \Rightarrow a_{2n_i-1, 2n_j-1}$$

$$a_{ij}^{(2)} + a_{2n_i-1, 2n_j} \Rightarrow a_{2n_i-1, 2n_j}$$

$$a_{ij}^{(3)} + a_{2n_i, 2n_j-1} \Rightarrow a_{2n_i, 2n_j-1}$$

$$a_{ij}^{(4)} + a_{2n_i, 2n_j} \Rightarrow a_{2n_i, 2n_j}$$

$$b_i^{(1)} + b_{2n_i-1} \Rightarrow b_{2n_i-1}$$

$$b_i^{(2)} + b_{2n_i} \Rightarrow b_{2n_i}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

2. 线元分析 $B = (A_1, A_2)$

可以统一考虑为 Γ_2 上的形式即

$$J_B = \int_B \left\{ \frac{1}{2} (\eta_{xx} u^2 + 2\eta_{xy} uv + \eta_{yy} v^2) - (q_x u + q_y v) \right\} ds$$

用线性插值

$$u \sim \sum u_i \lambda_i, v \sim \sum v_i \lambda_i$$

$\eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}, q_x, q_y$ 均取常数值, 于是

$$J_B = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 [a_{ij}^{(1)} u_i u_j + a_{ij}^{(2)} u_i v_j + a_{ij}^{(3)} v_i u_j + a_{ij}^{(4)} v_i v_j] - \sum_{i=1}^2 [b_i^{(1)} u_i + b_i^{(2)} v_i]$$

$$a_{ij}^{(1)} = \eta_{xx} L(1 + \delta_{ij}) / 6, \quad a_{ij}^{(2)} = \eta_{xy} L(1 + \delta_{ij}) / 6$$

$$a_{ij}^{(3)} = \eta_{xy} L(1 + \delta_{ij}) / 6, \quad a_{ij}^{(4)} = \eta_{yy} L(1 + \delta_{ij}) / 6$$

$$b_i^{(1)} = q_x L / 2, \quad b_i^{(2)} = q_y L / 2$$

若 $B = (A_{n_1}, A_{n_2})$, 即顶点标号为 n_1, n_2 时, 合成累加公式与面元情况相同, 不予赘述但 $i, j = 1, 2$.

3. 点元分析 $A = (A_1)$

有些问题的能量积分可能含有点项如

$$J_A = \left[\frac{1}{2} (\mu_{xx} u^2 + 2\mu_{xy} uv + \mu_{yy} v^2) - (p_x u + p_y v) \right]_A$$

$\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{yy}$ 为点弹性支承系数, p_x, p_y 为点载荷. 这已经是离散的形式. 命点 $A = A_1$ 的位移为 u_1, v_1 ,

$$J_A = \frac{1}{2} (a_{11}^{(1)} u_1 v_1 + a_{11}^{(2)} u_1 v_1 + a_{11}^{(3)} v_1 u_1 + a_{11}^{(4)} v_1 v_1) - (b_1^{(1)} u_1 + b_1^{(2)} v_1)$$

$$a_{11}^{(1)} = \mu_{xx}, \quad a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(3)} = \mu_{xy}, \quad a_{11}^{(4)} = \mu_{yy}$$

$$b_1^{(1)} = p_x, \quad b_1^{(2)} = p_y$$

若 $A = (A_{n_1})$ 即顶点标号为 n_1 则合成累加方式也同面、线元相同, 但 $i, j = 1$.

关于强加条件的处理, 这里要比 3.3 节复杂.

对于 Γ_0 上的点元, 设其标号为 k , 则 (4.28) 表为

$$w_{2k-1} = \bar{u}_k, \quad w_{2k} = \bar{v}_k \quad (4.39)$$

对于 Γ_1 上的点元, 设其标号为 k , 则(4.29) 表为

$$\nu_{x,k} w_{2k-1} + \nu_{y,k} w_{2k} = \bar{u}_{\nu,k} \quad (4.40)$$

在 L_1 上的每点有“正”“负”两个点元, 设其编号为 k, l 则(4.34) 表为

$$\nu_{x,k} w_{2k-1} + \nu_{y,k} w_{2k} - \nu_{x,l} w_{2l-1} - \nu_{y,l} w_{2l} = 0 \quad (4.41)$$

(4.39 ~ 4.41) 一起构成了强加条件方程组, 如 3.3 节中所述的一般形式(3.14). 因此, 可以用逐个分析强加条件点的方法来逐步形成有关的条件系数阵 C, d , 阵 C 当然也是稀疏的. 按照拉格朗日乘子法, 最终定解的系数阵(3.16) 是

$$\begin{bmatrix} A & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

考虑一种重要的特殊情况, 即在边界上不受任何强加的条件. 这时(4.37) 成为无条件变分问题

$$J(u, v) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} [\alpha(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 + 4\beta(\epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{xx}\epsilon_{yy})] - (f_x u + f_y v) \right\} dx dy - \oint_{\partial\Omega} (q_x u + q_y v) ds = \text{极小} \quad (4.42)$$

这是退化半正定的情况. 对应于(4.22) 的齐次问题 —— 即命 $f_x \equiv f_y \equiv 0, q_x \equiv q_y \equiv 0$

$$J_0(u, v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} [\alpha(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 + 4\beta(\epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{xx}\epsilon_{yy})] dx dy = \text{极小} \quad (4.43)$$

有三个非零基本解,

$$\begin{cases} u \equiv 1 \\ v \equiv 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u \equiv 0 \\ v \equiv 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u \equiv y \\ v \equiv -x \end{cases} \quad (4.44)$$

任意非零解可以表为这三个基本解的线性组合,

$$\begin{cases} u = a + cy \\ v = b - cx \end{cases} \quad (4.45)$$

这表示不受约束不受载荷的弹性体的平衡解可以是也只能是刚性平移加旋转.

在非齐次的情况, 问题(4.42) 有解的充要条件即协调条件是

$$\iint_{\Omega} f_x dx dy + \int_{\partial\Omega} q_x ds = 0 \quad (4.46)$$

$$\iint_{\Omega} f_y dx dy + \int_{\partial\Omega} q_y ds = 0 \quad (4.47)$$

$$\iint_{\Omega} (y f_x - x f_y) dx dy + \int_{\partial\Omega} (y q_x - x q_y) ds = 0 \quad (4.48)$$

这表示只有当外载荷的合力和合力矩为零时, 不受约束的弹性体才能达成平衡. 当此协调条件被满足时, 任意两个解可以相差一个刚性运动即(4.45).

以上变分问题(4.42) 或(4.43) 自然是在一切具有一定光滑性使积分(4.42) 有意义的位移函数类 S 中定解的. 在离散化后则是在 S 的子类(即一切片状线性的位移函数类) 中定解, 问题(4.42) 或(4.43) 分别变为

$$\text{在 } S \text{ 中定 } (u, v) \text{ 使得 } J(u, v) = \text{极小} \quad (4.49)$$

$$\text{在 } S \text{ 中定 } (u, v) \text{ 使得 } J_0(u, v) = \text{极小} \quad (4.50)$$

它们又分别等价于非齐次或齐次的线代数方程组

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}^{(1)} u_j + \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}^{(2)} v_j = b_i^{(1)} \\ \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}^{(3)} u_j + \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}^{(4)} v_j = b_i^{(2)} \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}^{(1)} u_j + \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}^{(2)} v_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}^{(3)} u_j + \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}^{(4)} v_j = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

注意齐次变分问题(4.43)在 S 内的通解(4.45)是线性的,因此也属于其子类 S' ,因此离散化后的齐次问题(4.50)即(4.52)的通解同样是(4.45),同时也说明了离散问题(4.49)和(4.42)一样也是退化半正定,而且具有相同的“退化度”3——相当于三个基本解(4.44).按照线代数的理论,非齐次问题(4.49)即(4.51)有解的充要条件为右项向量 $(b^{(1)}, b^{(2)})$ 与齐次问题的基本解向量(即将(4.44)离散化)相正交,因此得三个协调条件

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i^{(1)} = 0 \quad (4.53)$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i^{(2)} = 0 \quad (4.54)$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} (y_i b_i^{(1)} - x_i b_i^{(2)}) = 0 \quad (4.55)$$

类似于(3.25),可以证明,如果单元分析中涉及 f_x, f_y, q_x, q_y 的计算是准确进行的话,则有

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i^{(1)} = \iint_{\Omega} f_x dx dy + \int_{\partial\Omega} q_x ds \quad (4.56)$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i^{(2)} = \iint_{\Omega} f_y dx dy + \int_{\partial\Omega} q_y ds \quad (4.57)$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} (y_i b_i^{(1)} - x_i b_i^{(2)}) = \iint_{\Omega} (y f_x - x f_y) dx dy + \int_{\partial\Omega} (y q_x - x q_y) ds \quad (4.58)$$

因此原始的协调条件(4.46~4.48)自动保证离散的协调条件(4.53~4.55),从而保证离散方程组(4.52)有解而任意两个解相差一个刚性运动(4.45).这里再一次显示了有限元法在“特性保持”方面的优点.

在实践上,由于对 f_x, f_y, q_x, q_y 作了近似处理而条件(4.53~4.55)可能不严格成立,

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i^{(1)} = \epsilon_1$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} b_i^{(2)} = \epsilon_2$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} (y_i b_i^{(1)} - x_i b_i^{(2)}) = \epsilon_3$$

这时可对 $b_i^{(1)}, b_i^{(2)}$ 加以调整即

$$\begin{aligned} b_i^{(1)} &= a - cy_i \Rightarrow b_i^{(1)} \\ b_i^{(2)} &= b + cx_i \Rightarrow b_i^{(2)}, \quad i = 1, \dots, N_0 \end{aligned}$$

这里常数 a, b, c 是方程组

$$\begin{cases} aN_0 + c \sum_{i=1}^{N_0} y_i = \epsilon_1 \\ bN_0 - c \sum_{i=1}^{N_0} x_i = \epsilon_2 \\ a \sum_{i=1}^{N_0} y_i - b \sum_{i=1}^{N_0} x_i + c \sum_{i=1}^{N_0} (y_i^2 - x_i^2) = \epsilon_3 \end{cases}$$

的解, 而新的 b_i 满足 (4.53 ~ 4.55). 有关退化平面弹性问题的代数解法可以参考 [4].

4.4 二次插值的应用

三角元的二次插值法 (2.5 节) 与线性插值法一样, 对于二阶椭圆型问题包括边值问题和本征值问题是普遍适用的. 下面仅以 §3 的问题 (3.1) (稍加推广) 为例来说明

$$\begin{cases} J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \gamma u^2 \right] - fu \right\} dx dy \\ \quad + \int_{\sigma} \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds + \sum_{\sigma'} [-pu] = \text{极小} \\ \Omega_0: u = \bar{u} \end{cases}$$

进行离散化时, 首先注意插值节点除了全部点元外还包括全部线元的中点. 需要对全部插值节点进行编号, 也就是要对全部点元和全部线元进行统一的编号, 相应未知数就是

$$u_1, u_2, \dots, u_N, \quad N = N_0 + N_1$$

参照 3.1 节和 2.5 节可得单元分析和合成公式如下:

1. 面元 $C = (A_1, A_2, A_3)$

$$u \sim \sum_{i=1}^6 u_i \varphi_i, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \sum_{i=1}^6 u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim \sum_{i=1}^6 u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$$

$$J_c(u) = \iint_C \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \gamma u^2 \right] - fu \right\} dx dy \sim \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 a_{ij}^{(C)} u_i u_j - \sum_{i=1}^6 b_i^{(C)} u_i$$

$$a_{ij}^{(C)} = \iint_C \left[\beta \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \gamma \varphi_i \varphi_j \right] dx dy = a_{ij}^{(C)}$$

$$b_i^{(C)} = \iint_C f \varphi_i dx dy$$

关于基函数的积分问题见后.

若 C 的三顶点的统一编号为 n_1, n_2, n_3 而相应的对边中点的统一编号为 n_4, n_5, n_6 时, 则在合成时应按下式累加

$$a_{ij}^{(C)} + a_{n_i n_j} \Rightarrow a_{n_i n_j}$$

$$b_i^{(C)} + b_{n_i} \Rightarrow b_{n_i}, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

2. 线元 $B = (A_1, A_2)$

$$u \sim \sum_{i=1}^6 u_i \varphi_i, \quad \frac{\partial u}{\partial s} \sim \sum_{i=1}^6 u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s}$$

$$J_B(u) = \int_B \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - qu \right] ds \sim \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(B)} u_i u_j - \sum_{i=1}^3 b_i^{(B)} u_i$$

$$a_{ij}^{(B)} = \int_B \eta \varphi_i \varphi_j ds = a_{ji}^{(B)}$$

$$b_i^{(B)} = \int_B q \varphi_i ds$$

若 B 的两顶点统一编号为 n_1, n_2 , 而其中点的统一编号为 n_3 时, 则合成时的累加公式为

$$a_{ij}^{(B)} + a_{n_i n_j} \Rightarrow a_{n_i n_j}$$

$$b_i^{(B)} + b_{n_i} \Rightarrow b_{n_i}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

3. 点元 $A = (A_1)$

$$u = u_1$$

$$J_A = \left[\frac{1}{2} \mu u^2 - pu \right]_A = \frac{1}{2} a_{11}^{(A)} u_1 u_1 - b_1^{(A)} u_1$$

$$a_{11}^{(A)} = \mu$$

$$b_1^{(A)} = p$$

若点元 A 的统一编号为 n_1 , 则合成时的累加公式为

$$a_{11}^{(A)} + a_{n_1 n_1} \Rightarrow a_{n_1 n_1}$$

$$b_1^{(A)} + b_{n_1} \Rightarrow b_{n_1}$$

在以上单元系数的积分表达式事实上是一般的, 在不同的插值方法中, 只是基函数选取的不同. 关于积分的计算, 正如在 2.5 节末段所指出, 可以采取数值积分的方法, 它有通用的优点, 便于把不同的插值方法统一在一个程序里. 这里基函数及其导数都有重心坐标的表达式 (2.15 ~ 2.16)、(2.18 ~ 2.19). 因此可用 2.4 节表 5 ~ 表 6 所列的适当精度的数值积分公式. 即使对于线性插值也可以采用数值积分, 而不用 3.1 节中所列的单元系数的明显公式.

对于三角剖分线性插值, 每个面元有三个对应于顶点的未知数, 总体方程的未知数总数为 N_0 , 即点元个数. 在二次插值, 每个面元上未知数从三个增至六个, 但这并不意味着总体未知数比线性情况增至二倍, 事实上, 这时未知数总数为 $N_0 + N_1$. 根据近似比例 $N_0 : N_2 : N_1 \approx 1 : 2 : 3$ (见 2.1 节) 可知 $N_0 + N_1 \approx N_0 + 3N_0 = 4N_0$, 增至四倍. 因此用线元中点参数插值一般是比较“费”的, 但这只是相对于同一剖分而言. 事实上, 插值精度的提高意味着剖分有放粗的可能. 实践表明, 在达到同一合理精度要求的情况, 用粗剖分二次插值比用细剖分一次插值的未知数总数往往要省得多, 从而有可能大大压缩解题的规模. 这一点对于本征值问题尤其重要. 这是因为, 当矩阵阶数较高而又要求定出多个本征值和本征向量时, 计算方法上还有较大困难.

参 考 资 料

- [1] 加藤敏夫,《变分法及其应用》,上海科学技术出版社,1961.
- [2] 冯康,《基于变分原理的差分格式》,应用数学与计算数学,2:4(1965),238 ~ 262 页.
- [3] 齐基威茨—邱,《结构和连续力学中的有限单元法》,国防工业出版社,1973.
- [4] 黄鸿慈,王萃贤,崔俊芝,赵静芳,林宗楷,《按位移解平面弹性问题的差分方法》,应用数学与计算数学 3:1(1966),54 ~ 60 页.