广义 Mellin 变换 I①

MELLIN TRANSFORM IN DISTRIBUTIONS, I

本文中将把古典的 Mellin 积分变换②

$$f(s)=\int_0^{\infty}F(x)x^{s-1}dx,$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)x^{-s}ds$$

推广至广义函数．古典 Mellin 变换作用于半直线$(0,\infty)$．因此我们将以半直线上的广义函数类(定义 1)为 Mellin 变换的定义域．古典理论中 Mellin 像函数一般为解析函数，因此将以某种"解析"的广义函数类(定义 2)为像域．作指数变换后，Mellin 变换即变为双边 Laplace 变换，而后者实质就是复 Fourier 变换．在广义函数论已有了较完整的 Fourier 变换理论，故推至 Mellin 变换是很容易的．我们基本上将依据 Гельфанд-Шилов[4] 的复 Fourier 变换理论，关于卷积理论则将采用 Schwartz[3] 的方法．本文中所得关于卷积的结果的一些应用将见另文，本文的主题及主导思想系华罗庚先生所指示，在此向他致谢．

§1　P 广义函数与 Q 广义函数

1.1　既然 Mellin 变换作用于开半直线$(0,\infty)$上的函数，故首先应讨论半直线$(0,\infty)$上的广义函数．

定义 1　界定 $\mathbf{P}=\mathbf{P}[x]$ 为由一切界定在$(0,\infty)$上的复数值的，无穷可微的，并且在一个相对于$(0,\infty)$为紧密的区间以外恒为零的函数 $\varphi(x)$ 组成的线性空间．规定函数列 $\varphi_j\to 0(\mathbf{P})$，如果同时满足下列二条件：

1) 存在一个公共的对$(0,\infty)$紧密区间，在此区间以外一切函数 $\varphi_j(x)$ 均恒等于 0.

2) $\varphi_j(x)$ 及其各级微商均(分别)一致收敛于 0.

定在基本空间 $\mathbf{P}$ 上的复数值连续线性泛函 F 叫做半直线上的广义函数，或 $\mathbf{P}$ 广义函数，其值以 (F,φ) 表示．一切 $\mathbf{P}$ 广义函数组成一个线性空间，即 $\mathbf{P}$ 的共轭空间 $\mathbf{P}'=\mathbf{P}'[x]$．规定广义函数列 $F_j\to 0(\mathbf{P}')$，如果对一切 $\varphi\in\mathbf{P}$ 有 $(F_j,\varphi)\to 0$．

所谓函数型的 $\mathbf{P}$ 广义函数系由积分产生

---

① 原载于《数学学报》,Vol. 7, No. 2, pp242-267, 1957.

② 见，例如，[1].

$$(F,\varphi)=\int_0^\infty F(x)\varphi(x)dx,$$

此处 $F(x)$ 为 $(0,\infty)$ 上的局部可积函数．设在泛函意义下 $F=0$，则易见相应的函数 $F(x)$ 殆遍为 0；因此可以把函数与由之产生的广义函数等同．今后将以 $F(x)$（圆括弧）表示函数型的广义函数而以 $F[x]$ 表示一般的，不必是函数型的广义函数．

半直线 $\mathbf{P}$ 广义函数理论与一般的全直线 $\mathbf{K}$ 广义函数①理论实质上是等价的．盖首先利用变数代换 $x=e^u, u=\log x$ 而界定

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\varphi=(\mathscr{E}\varphi)(u)&=e^u\varphi(e^u),\\ \mathscr{E}^{-1}\chi=(\mathscr{E}^{-1}\chi)(x)&=x^{-1}\chi(\log x)\end{aligned}\tag{1}$$

$$(0<x<\infty,\ -\infty<u<+\infty, \varphi(x)\in\mathbf{P}[x], \chi(u)\in\mathbf{K}(u)).$$

显然 $\mathscr{E}, \mathscr{E}^{-1}$ 为基本空间 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{K}$ 之间的一对互逆的同构映射．由此对 $F[x]\in\mathbf{P}'[x], T[u]\in\mathbf{K}'[u]$ 界定

$$\begin{aligned}(\mathscr{E}F,\chi)&=(F,\mathscr{E}^{-1}\chi)=(F[x],x^{-1}\chi(\log x)),\\ (\mathscr{E}^{-1}T,\varphi)&=(T,\mathscr{E}\varphi)=(T[u],e^u\varphi(e^u)),\end{aligned}\tag{2}$$

（也可以写为 $(\mathscr{E}F,\mathscr{E}\varphi)=(F,\varphi), (\mathscr{E}^{-1}T,\mathscr{E}^{-1}\chi)=(T,\chi)$）即得广义函数空间 $\mathbf{P}'[x]$ 与 $\mathbf{K}'[u]$ 之间一对互逆同构映射．变换 $\mathscr{E}$ 叫做指数代换；它就是普通函数的自变数指数代换的推广，盖易证

$$\begin{aligned}F[x]=F(x)&\Rightarrow^{②}(\mathscr{E}F)[u]=F(e^u),\\ T[u]=T(x)&\Rightarrow(\mathscr{E}^{-1}T)[x]=T(\log x).\end{aligned}\tag{3}$$

$\mathbf{P}$ 广义函数的线性运算（同态）③一般都由基本空间 $\mathbf{P}$ 的线性运算导出．例如我们界定乘子积及对 x 的微商如下：

$$(AF,\varphi)=(F,A\varphi),$$

$$(D_x^pF,\varphi)=(-1)^p(F,D_x^p\varphi),$$

此处 $A=A(x)$ 为任意界定在 $(0,\infty)$ 上的无穷可微函数，易证

$$D_x^p(A(x)F)=\sum_{k=0}^{p}C_p^kD_x^kA(x)\cdot F.\tag{4}$$

也易证指数代换与乘积的关系：

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(A(x)F[x])&=A(e^u)\cdot(\mathscr{E}F)[u],\\ \mathscr{E}^{-1}(B(u)T[u])&=A(\log x)(\mathscr{E}^{-1}T)[x].\end{aligned}\tag{5}$$

又因

$$\begin{aligned}D_u(\mathscr{E}\varphi)&=D_u(e^u\varphi(e^u))=\left(D_x(x\varphi(x))\frac{dx}{du}\right)_{x=e^u}\\ &=e^u(D_x(x\varphi(x)))_{x=e^u}=\mathscr{E}(D_xx)\varphi,\\ (D_u\mathscr{E}F,\mathscr{E}\varphi)&=-(\mathscr{E}F,D_u\mathscr{E}\varphi)=-(\mathscr{E}F,\mathscr{E}(D_xx)\varphi)\\ &=(xD_xF,\varphi)=(\mathscr{E}(xD_x)F,\mathscr{E}\varphi)\end{aligned}$$

---

① 关于基本空间 $\mathbf{K}$，共轭空间 $\mathbf{K}'$ 的定义及其性质见[2]或[4]或[5]．

② 符号"⇒"表示"蕴涵"．

③ 本文中所有线性运算，同态，同构都包涵连续性．

故得指数代换与微分运算的关系：

$$
\begin{aligned}
&D_u \mathscr{E} \varphi = \mathscr{E}(D_x x)\varphi, \quad D_u^p \mathscr{E} \varphi = \mathscr{E}(D_x x)^p \varphi, \quad (\varphi \in \mathbf{P}),\\
&D_u \mathscr{E} F = \mathscr{E} x D_x F, \quad D_u^p \mathscr{E} F = \mathscr{E}(x D_x)^p F, \quad (F \in \mathbf{P}').
\end{aligned} \tag{6}
$$

设 $g(x)$，$g^{-1}(x)$ 为 $(0,\infty)$ 上的一对互逆的无穷可微函数，并且 $\varphi(x) \to \varphi(g^{-1}(x))$ 形成空间 $\mathbf{P}$ 的自同构映射(满足这些条件的叫做许可函数)，则对任意 $F[x] \in \mathbf{P}'$ 可以界定复合广义函数①$F[g(x)] \in \mathbf{P}'$ 如下

$$(F[g(x)],\varphi(x)) = (F[x], |D_x g^{-1}(x)| \cdot \varphi(g^{-1}(x))). \tag{7}$$

易证

$$
\begin{gathered}
F[x] = F(x) \Rightarrow F[g(x)] = F(g(x)),\\
D_x(F[g(x)]) = D_x g(x) \cdot (D_x F)[g(x)],\\
A = A(x) \text{ 无穷可微} \Rightarrow (AF)[g(x)] = A(g(x))F[g(x)].
\end{gathered}
$$

取 $g(x) = ax^c$ $(a > 0, c \text{ 实数} \neq 0)$ 即得

$$(F[ax^c],\varphi(x)) = \left(F[x], \frac{1}{|c|} a^{-\frac{1}{c}} x^{\frac{1}{c}-1} \varphi(a^{-\frac{1}{c}} x^{\frac{1}{c}})\right), \tag{8}$$

$$(x^\beta \cdot F[ax^c],\varphi(x)) = \left(F[x], \frac{1}{|c|} a^{-\frac{\beta+1}{c}} x^{\frac{\beta-c+1}{c}} \varphi(a^{-\frac{1}{c}} x^{\frac{1}{c}})\right), \tag{9}$$

此处 β 为任意复数．注意 $F[x] \to x^\beta \cdot F[ax^c]$ 是空间 $\mathbf{P}'$ 的自同构映射．特别有

$$(F[ax],\varphi(x)) = (F[x], a^{-1}\varphi(a^{-1}x)), \tag{10}$$

$$(F[x^c],\varphi(x)) = \left(F[x], \frac{1}{|c|} x^{\frac{1}{c}-1} \varphi(x^{\frac{1}{c}})\right), \tag{11}$$

$$(x^{-1} \cdot F[x^{-1}],\varphi(x)) = (F[x], x^{-1}\varphi(x^{-1})). \tag{12}$$

变换 $F[x] \to x^{-1} \cdot F[x^{-1}]$ 很有用，我们将以 φ^* 表 $x^{-1}\varphi(x^{-1})$，F^* 表 $x^{-1} \cdot F[x^{-1}]$，即

$$(F^*,\varphi) = (F,\varphi^*). \tag{13}$$

很易推导下列关系

$$x^\beta \cdot F[ax^c] = a^{c\beta-1}(x^{c^{-1}\beta}F)[x^c], \tag{14}$$

$$(A(x)F)^*[x] = A(x^{-1})F^*[x] = A^*(x)F[x^{-1}], \tag{15}$$

$$D_x^p F[ax] = a^p (D_x^p F)[ax], \tag{16}$$

$$DT^* = -x^{-1}F^* - x^{-2}(DF)^*. \tag{17}$$

设 $g(x)$ 为 $(0,\infty)$ 上的许可函数，则易见

$$
\begin{gathered}
h(u) = \log(g(e^u))\\
h^{-1}(u) = \log(g^{-1}(e^u))
\end{gathered}
$$

为 $(-\infty, +\infty)$ 上的许可函数，故对 $T \in \mathbf{K}'[u]$ 可以界定复合函数 $T[h(u)] \in \mathbf{K}'$

$$(T[h(u)],\chi(u)) = (T[u], |D_u h^{-1}(u)| \cdot \chi(h^{-1}(u)))$$

于是有

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{E}(F[g(x)]) = (\mathscr{E} F)[\log(g(e^u))],\\
&\mathscr{E}^{-1}(T[h(u)]) = (\mathscr{E}^{-1}T)[e^{h(\log x)}]
\end{aligned} \tag{18}
$$

这都可从定义直接验证．特别当 $g(x) = ax^c$ 时，则因 $\log(g(e^u)) = cu + \log a$ 故得

---

① 见[5]，§ 3.3.

$$\mathscr{E} F[ax^c] = (\mathscr{E} F)[u + \log a],$$
$$\mathscr{E}^{-1}(T[cu + b]) = (\mathscr{E}^{-1}T)[e^b x^c], \tag{19}$$

此处 $a > 0$，$-\infty < b < +\infty$，c 为实数 $\neq 0$. 注意因

$$\mathscr{E} x^\beta = e^{\beta u},\ \mathscr{E} (\log x)^c = x^c, (\beta \text{ 复数})$$

故有

$$\mathscr{E} (x^\beta \cdot F[ax^c]) = e^{\beta u} \cdot (\mathscr{E} F)[cu + \log a], \tag{20}$$

$$\mathscr{E} F^* = e^{-u}(\mathscr{E} F)[-u], \tag{21}$$

$$\mathscr{E} (F[x^{-1}]) = (\mathscr{E} F)[-u]. \tag{22}$$

1.2　我们说 P 广义函数 F 是一个 PS 广义函数，写为 $F \in \mathrm{PS}'$ 如果泛函 (F,φ) 可以扩张为基本空间 PS 上的一个线性连续泛函．此处 PS 的定义为

(i)　$\varphi \in \mathrm{PS}$ 的充要条件为 $\varphi(x)$ 为无穷可微，并对任意多项式 $P(u)$ 及整数 $p \geqslant 0$ 而言，$P(\log x)x(D_x x)^p\varphi(x)$ 有界；

(ii)　$\varphi_j \to 0(\mathrm{PS})$ 的充要条件为对任意多项式 $P(u)$ 及整数 $p \geqslant 0$ 而言，$P(\log x)x(D_x x)^p\varphi_j(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上一致 $\to 0$.

显然易见

$$\mathscr{E}(\mathrm{PS}) = \mathrm{S}^{①}, \mathscr{E}(\mathrm{PS}') = \mathrm{S}'.\ F_j \to 0(\mathrm{PS}') \Rightarrow F_j \to O(\mathrm{P}').$$

亦极易验证(利用指数变换).

命题 1　$F \in \mathrm{PS}'$ 与下列条件分别等价：

(i)　F 可以表为

$$F = (xD_x)^p G,$$

此处 $G = G(x)$ 为连续函数并满足对数缓增条件，即存在 $B, C > 0$ 使得②

$$|G(x)| \leqslant B(1 + |\log x|^2)^c;$$

(ii) 对一切 $\varphi \in \mathrm{P}$ 而言函数 $\varphi_F(x) = (F[y], \varphi(xy))$ 如无穷可微并对每一个整数 $p \geqslant 0$ 满足③

$$|x(D_x x)^p\varphi_F(x)| \leqslant B_p(1 + |\log x|^2)^{c_p}.$$

命题 2　设 $F \in \mathrm{PS}'$，则 $(xD_x)^pF, F[ax^c], A(x)F \in \mathrm{PS}'$；此处 $p = 0,1,2,\cdots, a > 0$，c 实数 $\neq 0$，$A(x)$ 为 PS 乘子，即为无穷可微，并对每一个整数 $p \geqslant 0$ 而言满足④

$$|(xD_x)^pA(x)| \leqslant B_p(1 + |\log x|^2)^{c_p}.$$

(记作 $A \in \mathrm{PS}'_m$).

特别可见，设 $F \in \mathrm{PS}'$，则 $P(\log x)F \in \mathrm{PS}'$，$x^{ib}F \in \mathrm{PS}'$，此处 $P(u)$ 为任意多项式，b 为任意实数．又设 β 为复数，则 $x^\beta \in \mathrm{PS}'$ 的充要条件为 $\mathscr{R}\,\beta = 0$.

我们说 P 广义函数 F 为 PS 卷子，记作 $F \in \mathrm{PS}'_c$，如果

$$\varphi(x) \in \mathrm{P} \to \varphi_F(x) = (F[y], \varphi(xy))$$

---

① 关于 Schwartz 空间 S 的定义见[2]或[4]或[5]第一章．

② 见，例如，[5]，§ 6.2 定理 2.

③ 见，例如，[5]，§ 6.2 定理 3.

④ 关于 S 乘子域 S'_m 的特征性质，见例[2]，p. 101—102. 该处 S'_m 记作 O_M.

界定一个同态映射映 P 入 PS. 易证 $PS'_c \subset PS'$, $\mathscr{E}(PS'_c) = S'_c$ [①]. $F \in PS'_c$ 的充要条件为对任意 $q \geqslant 0$ 而言, F 可以表为有限和[②]

$$F = \sum_{i=1}^{m} (xD_x)^{p_k} G_k,$$

此处 $G_k = G_k(x)(k = 1, \cdots, m)$ 写连续并且 $(1 + |\log x|^2)^q G_k(x)$ 有界.

类似地可以界定 PE 广义函数而无待细述, $\mathscr{E}(PE) = E$, $\mathscr{E}(PE') = E'$. $F \in PE'$ 的充要条件为 F 具有对 $(0, \infty)$ 相对紧密的支集[③].

1.3 古典理论中函数的 Mellin 变换一般都是解析函数. 故要讨论半直线广义函数的 Mellin 变换自然要用由解析函数组成的基本空间.

定义 2 线性空间 Q 系由一切定义在复数平面上满足下列条件的函数 $\psi(s)(s = \sigma + it)$ 组成.

1) $\psi(s) = \psi(\sigma + it)$ 为整解析函数并存在 $A, B \geqslant 0$ 使得

$$|\psi(\sigma + it)| \leqslant Ae^{B|\sigma|}.$$

2) 对每个固定的 σ 而言 $\psi(\sigma + it) \in S[t]$.

规定函数列 $\psi_j \to 0(Q)$, 如果同时满足下列条件

3) 存在与 j 无关的 $A, B \geqslant 0$ 使得一致地有

$$|\psi_j(\sigma + it)| \leqslant Ae^{B|\sigma|}.$$

4) 对每个固定的 σ 而言 $\psi(\sigma + it) \to 0(S[t])$.

空间 $Q = Q[s]$ 上的线性连续泛函 $f = f[s]$ 叫做 Q 广义函数, 它们组成 Q 的共轭空间 $Q'[s]$. 规定 Q 广义函数列 $f_j \to 0(Q')$, 如果对一切 $\psi \in Q$ 有 $(f_j, \psi) \to 0$.

定理 1 变换 $\varphi \to \mathscr{M}\varphi = \psi$,

$$\psi(s) = \mathscr{M}\varphi(s) = \int_0^\infty \varphi(x) x^{-s} dx, \quad \varphi \in P \tag{23}$$

为空间 $P[x]$ 成空间 $Q[s]$ 的同构映射, 其逆变换为

$$\varphi(x) = \mathscr{M}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \psi(s) x^{s-1} ds \quad (k \text{ 任意实数}). \tag{24}$$

注意作指数代换 $\varphi(x) \to \mathscr{E}\varphi = e^u \varphi(e^u) \in K$ 后式即成为

$$\psi(s) = \mathscr{M}\varphi(\sigma + it) = \mathscr{F}(\mathscr{E}\varphi(u) \cdot e^{-\sigma u})(t), \quad \mathscr{M}^{-1} \tag{25}$$

此处 $\mathscr{F}$ 表示实 Fourier 变换

$$\xi(t) = \mathscr{F}\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(u) e^{-itu} du, \tag{26}$$

$$\chi(u) = \mathscr{F}^{-1}\xi(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{itu} dt. \tag{27}$$

如以 $\mathscr{F}_c$ 表示复 Fourier 变换

$$\xi(s) = \mathscr{F}_c \chi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(u) e^{-isu} du, \tag{28}$$

则得

---

① 关于一般的卷子定义见[3], § 5.1. S'_c 即系由一切 S 卷子组成的集, 在[2]中 S'_c 记作 $\mathcal{O}'_c$. 此处参考[2], p. 100, 定理 IX, 3°.

② 见[2], p. 100, 定理 IX, 1°.

③ 关于空间 E 见[2]卷 I 或[5].

$$\mathscr{M}\,\varphi(s)=\mathscr{F}\,{}_c\mathscr{E}\,\varphi(s). \tag{29}$$

又注意对空间 Q 内函数 $\psi(s)$ 的变换，s 代为 $-is$ 后，空间 Q 即成为 Гельфанд-Шилов 所引进的基本空间 $\mathbf{Z}^1$，因此定理 1 实质上就是他们所证的空间 $\mathbf{Z}^1$，为空间 K 的 Fourier 对偶空间这一命题，故无需另证①.

注：在定义 1 中在条件 1 的前提下条件 2 等价于较弱的条件 2′：对某个 σ 而言 $\psi(\sigma+it)\in \mathrm{S}[t]$；而在条件 3 的前提下条件 4 等价于较弱的条件 4′：对某个 σ 而言 $\psi_j(\sigma+it)\to 0(\mathrm{S}[t])$.

命题 3　设 $\psi(s)\in \mathbf{Q}$，$P(t)$ 为实变数 t 的任意多项式，于是必有 $A,B\geqslant 0$（依赖于 ψ，P）使得

$$|P(t)\psi(\sigma+it)|\leqslant Ae^{B|\sigma|}.$$

更设 $\psi_j\to 0(\mathbf{Q})$，则有与 j 无关的 $A,B\geqslant 0$ 使得

$$|P(t)\psi_j(\sigma+it)|\leqslant Ae^{B|\sigma|}.$$

证：　由定理 1 及式(25) 知有 $\chi(u)\in \mathbf{K}$ 使得

$$\psi(\sigma+it)=\mathscr{F}\,(\chi(u)e^{-\sigma u})(t)$$

根据 Fourier 变换中多项式乘积与微分运算的交换关系（见，例如[5]，§7.1）可知

$$\begin{aligned}P(t)\psi(\sigma+it)&=\mathscr{F}\,(P(-iD_u)(\chi(u)e^{-\sigma u}))(t)\\&=\mathscr{F}\,\Big(\Big(\sum_k P_k(D_u)\chi(u)Q_k(\sigma)\Big)e^{-\sigma u}\Big)(t),\end{aligned}$$

此处 $\sum\limits_k$ 为一有限和，P_k,Q_k 为适当的多项式．因 χ 在一有界区间 $(-C,C)$ 以外恒为 0，故

$$P(t)\psi(\sigma+it)=\int_{-c}^{c}\Big(\sum_k Q_k(D_u)\chi(u)Q_k(\sigma)\Big)e^{-\sigma u}e^{-itu}du,$$

$$|P(t)\psi(\sigma+it)|\leqslant e^{C|\sigma|}\sum_k A_k|Q_k(\sigma)|\leqslant Ae^{B|\sigma|}.$$

更设 $\psi_j\to 0(\mathbf{Q})$，则相应的 $\chi_j\to 0(\mathbf{K})$，故 χ_j 在一公共的 $(-C,C)$ 以外恒为 0，故可取 A,B 与 j 无关．

空间 $\mathbf{Z}^1$ 的乘子定理（见，例如，[5]，§7.2 定理 7）在此改述为

命题 4　设 $\alpha(s)$ 为整解析函数满足

$$|\alpha(s)|\leqslant e^{C|\sigma|}(1+|s|^2)^q,$$

则 $\alpha(s)$ 为 Q 乘子，即 $\psi\in \mathbf{Q}\Rightarrow\alpha\psi\in \mathbf{Q}$，$\psi_j\to 0(\mathbf{Q})\Rightarrow\alpha\psi_j\to 0(\mathbf{Q})$.

基本函数的 Mellin 变换 $\mathscr{M}$ 与各种线性运算之间极易验证有简单的关系：

$$\mathscr{M}\,D_x\varphi=s\mathscr{M}\,\varphi(s+1), \tag{30}$$

$$\mathscr{M}\,D_x^p\varphi=s(s+1)\cdots(s+p-1)\mathscr{M}\,\varphi(s+p)=\frac{\Gamma(s+p)}{\Gamma(s)}\mathscr{M}\,\varphi(s+p), \tag{31}$$

$$\mathscr{M}\,x^\beta\varphi(ax^c)=\frac{1}{|a|}a^{\frac{s-\beta-1}{c}}\mathscr{M}\,\varphi\Big(\frac{c-\beta-1+s}{c}\Big), \tag{32}$$

$$\mathscr{M}\,x^\beta\varphi=\mathscr{M}\,\varphi(s-\beta),\qquad \mathscr{M}\,\varphi(ax)=a^{s-1}\mathscr{M}\,\varphi(s), \tag{33}$$

$$\mathscr{M}\,\varphi(x^{-1})=\mathscr{M}\,\varphi(-s),\qquad \mathscr{M}\,\varphi^*=\mathscr{M}\,\varphi(1-s), \tag{34}$$

---

① 注意这里空间 Q 与空间 Z′ 的 Гельфанд-Шилов[4] 定义在形式上是不相同的，但不难证明（可以应用 Phragman-Lindelöf 定理）实质上是等价的．也很容易直接应用 Paley-Wiener 定理而证明这里的定理 1 成立，从而间接地证明定义 1 与 Гельфанд-Шилов 定义的等价性．见[4]或[5]第 7 章．

$$\mathscr{M}(D_x x)\varphi = s\mathscr{M}\varphi(s),\qquad \mathscr{M}(D_x x)^p\varphi = s^p\mathscr{M}\varphi(s),\tag{35}$$

$$D_s\mathscr{M}\varphi(s) = \mathscr{M}(-\log x\varphi)(s),\quad D_s^p\mathscr{M}\varphi(s) = \mathscr{M}((-\log x)^p\varphi)(s).\tag{36}$$

由此也可以见到多项式乘积 $P(s)\psi(s)$ 与微分 $D_s^p\psi(s)$ 为空间 Q 内的自同态映射．

关于空间 Q′ 内的线性运算例如有

$$(D_s f,\psi) = -(f,D_s\psi),\quad (D_s^p f,\varphi) = (-1)^p(f,D_s^p\psi),$$

$$(\alpha(s)f,\psi) = (f[s],\alpha(s)\psi(s)),$$

此处 $\alpha(s)$ 为 Q 乘子．显然有

$$D_s(\alpha f) = D_s\alpha\cdot f + \alpha\cdot D_s f.\tag{37}$$

设 $z(s) = cs+\beta$ （β 复数，c 实数 $\neq 0$）．于是 $z^{-1}(s) = \dfrac{z-\beta}{c}$，$|D_s z^{-1}(s)| = \dfrac{1}{|c|}$，$\psi(z^{-1}(s)) = \psi\left(\dfrac{s-\beta}{c}\right)$．不难证明 $\psi(s)\to\psi\left(\dfrac{s-\beta}{c}\right)$ 为空间 Q 的自同构映射，因可对 $f[s]\in$ Q′ 界定复合广义函数 $f[cs+\beta]\in$ Q′

$$(f[cs+\beta],\psi(s)) = \left(f[s],\frac{1}{|c|}\psi\left(\frac{s-\beta}{c}\right)\right).\tag{38}$$

其特例为

$$(f[s+\beta],\psi(s)) = (f[s],\psi(s-\beta)),\tag{39}$$

$$(f[1-s],\psi(s)) = (f[s],\psi(1-s)).\tag{40}$$

易证

$$D_s(f[cs+\beta]) = c(D_s f)[cs+\beta],$$

$$(\alpha(s)\cdot f)[cs+\beta] = \alpha(cs+\beta)\cdot f[cs+\beta].$$

我们说 $g[s]\in$ Q′ 为 Q 卷子，如果 $\psi(s)\to\psi_g(s) = (g[z],\psi(z+s))$ 为空间 Q 的一个自同态映射．如 g 为 Q 卷子，则对任意 $f\in$ Q′ 可以界定加法卷积 $g*f\in$ Q′ 如下

$$(g*f,\psi) = (f[s],(g[z],\psi(z+s))),\tag{41}$$

1.4 兹列举一些 Q 广义函数的例子．最简单的就是复 δ 函数及其微商

$$(\delta_{(\alpha)},\psi) = \psi(\alpha),\quad (D_s^p\delta_{(\alpha)},\psi) = (-1)^p D_s^p\psi(\alpha),$$

此处 α 为任意复数．显然有

$$\delta_{(\alpha)}[cs+\beta] = \frac{1}{|c|}\delta_{\left(\frac{\alpha-\beta}{c}\right)},\quad \delta_{(\alpha)} = \delta_{(0)}[s-\alpha],\tag{42}$$

$$\delta_{(\alpha)}*f = f[s-\alpha],\ D^p\delta_{(\alpha)}*f = (D^p f)[s-\alpha],\ \delta_{(\alpha)}*\delta_{(\beta)} = \delta_{(\alpha+\beta)}.\tag{43}$$

设有 S 广义函数 W，k 为任意实数，于是由定义 2 知可以界定广义函数 $W|_{\mathscr{R}s=k}\in$ Q 如下

$$(W|_{\mathscr{R}s=k},\psi) = (W,\psi(k+it)_{S[t]})\tag{44}$$

此处右端数积系在空间 S[t] 内取．

我们说复变数函数 $f(s)$ 在经线 $\mathscr{R}s=\sigma=k$ 上为有限阶，如果在此经线上有

$$f(s) = O(|t|^q)\qquad (|t|\to\infty),\tag{45}$$

我们说 $f(s)$ 在有界闭径区 $c\leqslant\mathscr{R}s\leqslant d$ 上为有限阶，如果在此径区内一致地有(45)．我们说 $f(s)$ 在开径区 $a<\mathscr{R}s<b$[①] 内为有限阶，如果它在此径区内的任意有界闭径区上为有

① a,b 可以为 $\pm\infty$.

限阶．

设函数 $f(s)$ 在经线 $\mathscr{R}\ s=k$ 上为有限阶，并为局部可积（对 t），则容易验证

$$(f(s)|_{\mathscr{R}\ s=k},\psi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)\psi(s)ds \tag{46}$$

的确界定了一个广义函数 $f(s)|_{\mathscr{R}\ s=k}\in\mathbf{Q}'$. 我们有

命题 5 设泛函 $f(s)|_{\mathscr{R}\ s=k}=0$，则函数 $f(s)$ 在线 $\mathscr{R}\ s=k$ 上殆遍为 0，更设 $f(s)$ 在此线上为连续则在此线上 $f(s)\equiv 0$.

证明在原理上同于[4]中 §5 定理 1 的证明①. 从略．只须指出，证明的原理依赖于下列二事实：1) 当 k 固定时函数集 $\{\psi(k+it)|\psi\in\mathbf{Q}\}$ 在 Hilbert 空间 $L_2[t]$ 内稠密；2) $\psi_1,\psi_2\in\mathbf{Q}\Rightarrow\psi_1\psi_2\in\mathbf{Q}$. 根据定义 2 易知 2) 成立．关于 1) 则论证如下：在集合的意义下，显然有 $\{\chi(u)e^{-ku}|\chi\in\mathbf{K}[u]\}=\mathbf{K}[u]$，因此 $\{\psi(k+it)|\psi\in\mathbf{Q}\}=\mathscr{F}(\mathbf{K}[u])$. 但因 $\mathbf{K}[u]$ 在 $L_2[u]$ 内稠密，并且 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 为空间 $L_2[u]$ 与 $L_2[t]$ 之间的保范映射（Plancherel 定理），所以 $\{\psi(k+it)|\psi\in\mathbf{Q}\}$ 在 $L_2[t]$ 内稠密．

根据控制收敛的原理也容易证明

命题 6 设函数列 $f_j(s)=f_j(k+it)$ 在经线 $\mathscr{R}\ s=k$ 上具有一致的有限阶，并在此线上任意有界区间 $|t|\leqslant C$ 上一致 $\to 0$（或更弱一些 $\int_{|t|\leqslant C}|f_j(k+it)|^p dt\to 0\ (p\geqslant 1)$），则 $f_j(s)|_{\mathscr{R}\ s=k}\to 0(\mathbf{Q}')$.

重要的是下面的情况：设 $f(s)$ 在开径区 $a<\mathscr{R}\ s<b$ 内为有限阶并为解析（没有异点）. 任取实数 h,k 满足 $a<h<k<b$. 于是由于 $f(s)$ 在 $h\leqslant\mathscr{R}\ (s)\leqslant k$ 为一致有限阶，故根据命题 1 可以应用 Cauchy 积分定理而得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty}f(s)\psi(s)ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)\psi(s)ds,\quad \psi\in\mathbf{Q}$$

因此可以单义地界定广义函数 $f(s)|_{a<\mathscr{R}\ s<b}\in\mathbf{Q}'$ 如下

$$(f(s)|_{a<\mathscr{R}\ s<b},\psi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)\psi(s)ds,\quad a<k<b \tag{47}$$

此外 k 在 (a,b) 内可以任取．设 $f(s)$ 为有限阶的整解析函数，则迳以 $f(s)$ 表示相应的广义函数而不加脚标：

$$(f(s),\psi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)\psi(s)ds,\quad k\text{ 为任意实数}. \tag{48}$$

设函数 $f(s)$ 以 $s=\alpha$ 为极点，则界定残数泛函 $\mathrm{Res}f(s)|_{s=\alpha}\in\mathbf{Q}'$ 如下

$$(\mathrm{Res}f(s)|_{s=\alpha},\psi)=\mathop{\mathrm{Res}}_{s=\alpha}(f(s)\psi(s)),\quad(\psi\in\mathbf{Q}). \tag{49}$$

根据 $f(s)$ 在极点 $s=\alpha$ 的 Laurent 展式

$$f(s)=\frac{a_{-1}}{s-\alpha}+\frac{a_{-2}}{(s-\alpha)^2}+\cdots+\frac{a_{-q}}{(s-\alpha)^q}+g(s)$$

得知

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{s=\alpha}(f(s)\psi(s))=\sum_{p=1}^{q}\frac{a_{-p}}{(p-1)!}D_s^{p-1}\psi(\alpha),$$

因此

① 也可见，例如[3]，§7.5 定理 2.

$$\operatorname{Res}f(s)|_{s=\alpha}=\sum_{p=1}^{q}\frac{a_{-p}}{(p-1)!}(-1)^{p-1}D_s^{p-1}\delta_{(\alpha)},\tag{50}$$

特别当 $s=\alpha$ 为单极点时有

$$\operatorname{Res}f(s)|_{s=\alpha}=(\operatorname*{Res}_{s=\alpha}f(s))\delta_{(\alpha)}.\tag{51}$$

和前面一样，应用 Cauchy 积分定理即得

定理 2 设函数 $f(s)$ 在经区 $a<\mathscr{R}\,s<b$ 内为有限阶，并除去有限多个极点外为解析，设 h,k 为开区间 (a,b) 内的任意实数，并且 $f(s)$ 在经线 $\mathscr{R}\,s=h,\mathscr{R}\,s=k$ 上无极点，则有

$$f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k}=f(s)|_{\mathscr{R}\,s=h}+\operatorname{sign}(k-h)\sum_{n=1}^{m}\operatorname{Res}f(s)|_{s=\alpha_n},\tag{52}$$

此处 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 表示 $f(s)$ 在经线 $\mathscr{R}\,s=h,\mathscr{R}\,s=k$ 之间的全部极点．

这命题表示同一解析函数可以产生不同的 Q 广义函数，而它们之间相差一个由极点决定的残数泛函．今后将广泛应用这个简单的概念．

例 $a^s(a>0)$ 为有限阶整函数，相应的 Q 广义函数仍以 a^s 表示．半纯函数 $\frac{1}{s-\alpha}$ 也为有限阶，具有唯一极点 $s=\alpha$，残数为 1：

$$\left.\frac{1}{s-\alpha}\right|_{\mathscr{R}\,s>\mathscr{R}\,\alpha}=\left.\frac{1}{s-\alpha}\right|_{\mathscr{R}\,s<\mathscr{R}\,\alpha}+\delta_{(\alpha)}.\tag{53}$$

Γ 函数 $\Gamma(s)$ 是半纯函数，只有单极点 $\alpha=0,-1,-2,\cdots$，相应残数为 $\frac{(-1)^n}{n!}$，又由 $\Gamma(s)$ 的几近表示式知其为有限阶，因此

$$\Gamma(s)|_{\mathscr{R}\,s>0}=\Gamma(s)|_{-n-1<\mathscr{R}\,s<-n}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\delta_{(-k)}.\tag{54}$$

设 $f(s)$ 在径区 $a<\mathscr{R}\,s<b$ 内有限阶解析函数，它产生 $f(s)|_{a<\mathscr{R}\,s<b}\in Q'$．现在来考查各种线性运算对它的作用：

根据 Cauchy 不等式知导数 $D_sf(s)$ 在径区 $a<\mathscr{R}\,s<b$ 仍为有限阶解析，它产生 $D_sf(s)|_{a<\mathscr{R}\,s<b}\in Q$．因 $f(k+it)\psi(k+it)=0\quad(t=\pm\infty,a<k<b)$，故有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}D_sf(s)\cdot\psi(s)ds=-\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)D_s\psi(s)ds$$

即

$$D_s^p(f(s)|_{a<\mathscr{R}\,s<b})=D_s^pf(s)|_{a<\mathscr{R}\,s<b}.\tag{55}$$

设 $\alpha(s)$ 为 Q 乘子，则显然有

$$\alpha(s)\cdot(f(s)|_{a<\mathscr{R}\,s<b})=(\alpha(s)f(s))|_{a<\mathscr{R}\,s<b}.\tag{56}$$

根据(38)(47)知

$$\begin{aligned}((f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k})[cs+\beta],\psi(s))&=\left(f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k},\frac{1}{|c|}\psi\left(\frac{s-\beta}{c}\right)\right)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)\,\frac{1}{|c|}\psi\left(\frac{s-\beta}{c}\right)ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{k-\mathscr{R}\,\beta}{c}-i\infty}^{\frac{k-\mathscr{R}\,\beta}{c}+i\infty}f(cs'+\beta)\psi(s')ds'\end{aligned}$$

因此

$$(f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k})[cs+\beta] = f(cs+\beta)|_{\mathscr{R}\,s=\frac{k-\mathscr{R}\,\beta}{c}},$$

由此得

$$(f(s)|_{a<\mathscr{R}\,s<b})[cs+\beta] = f(cs+\beta)|_{a'<\mathscr{R}\,s<b'}. \tag{57}$$

此处，当 $c>0$ 时，$a'=\dfrac{a-\mathscr{R}\,\beta}{c}$，$b'=\dfrac{b-\mathscr{R}\,\beta}{c}$，而当 $c<0$ 时则 $a'=\dfrac{b-\mathscr{R}\,\beta}{c}$，$b'=\dfrac{a-\mathscr{R}\,\beta}{c}$. 特别有

$$(f(s)|_{a<\mathscr{R}\,s<b})[1-s] = f(1-s)|_{1-b<\mathscr{R}\,s<1-a}. \tag{58}$$

另设 $g(s)$ 在经区 $c<\mathscr{R}\,s<d$ 内为解析有限阶，设 $c<h<d$，$g(s)|_{\mathscr{R}\,s=h}$ 为 Q 卷子，于是由加法卷积的定义(41) 有

$$\begin{aligned}((g(s)|_{\mathscr{R}\,s=h}) * (f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k}),\psi) &= (f(z)|_{\mathscr{R}\,z=k},(g(w)|_{\mathscr{R}\,w=h},\psi(z+w)))\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(z)dz\,\frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} g(w)\psi(z+w)dw\\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}dz\int_{h+k-i\infty}^{h+k+i\infty} f(z)g(s-z)\psi(s)ds.\end{aligned} \tag{59}$$

今设

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}|g(s-z)f(z)|dz<\infty,(\mathscr{R}\,s=h+k)$$

并且它在线 $\mathscr{R}\,s=h+k$ 上为有限阶函数，于是函数$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}g(s-z)f(z)dz$ 在线 $\mathscr{R}\,s=h+k$ 上为有限阶并且

$$\begin{aligned}&\int_{h+k-i\infty}^{h+k+i\infty}ds\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}|g(s-z)f(z)\psi(s)|dz\\ &\qquad=\int_{h+k-i\infty}^{h+k+i\infty}|\psi(s)|ds\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}|g(s-z)f(z)|dz<\infty\end{aligned}$$

因此(59) 右端积分号可以调换而得

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{h+k-i\infty}^{h+k+i\infty}\psi(s)ds\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}g(s-z)f(z)dz$$

即

$$(g(s)|_{\mathscr{R}\,s=h}) * (f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k}) = \int_{k-i\infty}^{k+i\infty}g(s-z)f(z)dz|_{\mathscr{R}\,s=h+k}. \tag{60}$$

§2 广义函数的 Mellin 变换

2.1 **定义 3** 对任意 $\mathrm{F}\in\mathbf{P}'$ 界定其 Mellin 变换 $\mathscr{M}\,F\in\mathbf{Q}'$ 为

$$(\mathscr{M}\,F,\psi) = (F,\mathscr{M}^{-1}\psi),(\psi\in\mathbf{Q});\tag{61}$$

亦即

$$(\mathscr{M}\,F,\mathscr{M}\,\varphi) = (F,\varphi),\quad(\varphi\in\mathbf{P}).\tag{62}$$

对任意 $f\in\mathbf{Q}'$ 界定其逆 Mellin 变换，$\mathscr{M}^{-1}f\in\mathbf{P}'$ 为

$$(\mathscr{M}^{-1}f,\varphi) = (f,\mathscr{M}\,\varphi),(\varphi\in\mathbf{P}),\tag{63}$$

亦即

$$(\mathscr{M}^{-1}f,\mathscr{M}^{-1}\psi)=(f,\psi),\quad(\psi\in\mathbf{Q}).\tag{64}$$

显然可见 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{M}^{-1}$ 为空间 $\mathbf{P}'$ 与 $\mathbf{Q}'$ 之间的一对互逆的同构映射(即一一,线性,双连续).

设函数 $F(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可测,并对某实数 k 而言 $x^{k-1}F(x)\in L_1(0,\infty)$ 于古典的 Mellin 积分

$$f(s)=\int_0^\infty F(x)x^{s-1}dx\quad(\mathscr{R}\,s=k)$$

有意义,并且 $f(s)$ 在 $\mathscr{R}\,s=k$ 上有界.视 $F(x)=F\in\mathbf{P}'$ 而按定义 3 求其广义 Mellin 变换 $\mathscr{M}\,F\in\mathbf{Q}'$:

$$\begin{aligned}(\mathscr{M}\,F,\psi)=(F,\mathscr{M}^{-1}\psi)&=\left(F(x),\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(s)x^{-s}ds\right)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty F(x)dx\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(s)x^{s-1}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(s)\int_0^\infty F(x)x^{s-1}dx.\end{aligned}$$

此处因 $x^{k-1}F(x)\in L_1(0,\infty)$ 及 $\psi(k+it)\in\mathbf{S}[t]$ 可知

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}ds\int_0^\infty|\psi(s)F(x)x^{s-1}|dx<\infty,$$

因此上面积分次序的更换是合法的.又因 $f(s)$ 在 $\mathscr{R}\,s=k$ 上有界,故产生广义函数 $\int_0^\infty F(x)x^{s-1}dx|_{\mathscr{R}\,s=k}\in\mathbf{Q}'$,因此

$$(\mathscr{M}\,F,\psi)=\left(\int_0^\infty F(x)x^{s-1}dx|_{\mathscr{R}\,s=k},\psi\right)$$

即

$$\mathscr{M}\,F=\int_0^\infty F(x)x^{s-1}dx|_{\mathscr{R}\,s=k}.\tag{65}$$

因此广义的与古典的 Mellin 变换为一致.

反之,设有函数 $f(s)$ 在线 $\mathscr{R}\,s=k$ 上为有限阶并且 $f(k+it)\in L_1[t]=L_1(-\infty,\infty)$,于是古典的逆 Mellin 积分

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)x^{-s}ds$$

有意义.

今按定义 3 求 $f=f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k}\in\mathbf{Q}'$ 的广义逆 Mellin 变换 $\mathscr{M}^{-1}f$:

$$\begin{aligned}(\mathscr{M}^{-1}f,\varphi)=(f,\mathscr{M}\,\varphi)&=\left(f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k},\int_0^\infty\varphi(x)x^{-s}dx\right)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)ds\int_0^\infty\varphi(x)x^{-s}dx\\&=\int_0^\infty\varphi(x)dx\,\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)x^{-s}ds\end{aligned}$$

这里积分号更换是合法的,因为 $f(k+it)\in L_1(-\infty,\infty)$,$\varphi\in\mathrm{P}[x]$ 而

$$\int_0^\infty dx\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}|\varphi(x)f(s)x^{-s}|ds<\infty.$$

于是

$$(\mathscr{M}^{-1}f,\varphi)=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)x^{-s}ds,\varphi(x)\right),$$

即

$$\mathscr{M}^{-1}f=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(s)x^{-s}dx \tag{66}$$

因此广义的与古典的逆 Mellin 变换也是一致的．

很容易推出下列古典理论中所不容的 Mellin 变换：

$$\mathscr{M}\ \delta_{(a)}=a^{s-1},(a>0);\quad \mathscr{M}\ \delta_{(1)}=1 \tag{67}$$

$$\mathscr{M}\ x^{\beta}=\delta_{(-\beta)},(\beta\text{ 复数});\quad \mathscr{M}\ 1=\delta_{(0)}, \tag{68}$$

$$\mathscr{M}\ \log x=D_s\delta_{(0)},\mathscr{M}\ (\log x)^p=D_s^p\delta_{(0)}\quad (p\text{ 正整数}), \tag{69}$$

盖因

$$\begin{aligned}(\mathscr{M}\ \delta_{(a)},\psi)&=\left(\delta_{(a)},\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(s)x^{s-1}ds\right)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(s)a^{s-1}ds=(a^{s-1},\psi),\\(\mathscr{M}\ x^{\beta},\mathscr{M}\ \varphi)&=(x^{\beta},\varphi)=\int_0^{\infty}\varphi(x)x^{\beta}dx\\&=\mathscr{M}\ \varphi(-\beta)=(\delta_{(-\beta)},\mathscr{M}\ \varphi),\\(\mathscr{M}\ (\log x)^p,\mathscr{M}\ \varphi)&=((\log x)^p,\varphi)=\int_0^{\infty}\varphi(x)(\log x)^p dx\\&=(-1)^pD_s^p\mathscr{M}\ \varphi(0)=(D_s^p\delta_{(0)},\mathscr{M}\ \varphi).\end{aligned}$$

当然这些结果也都可以用指数代换与 Fourier 变换来推导．

考虑 $F=e^{-x}$，当 $\mathscr{R}\ s>1$ 时 Mellin 积分绝对收敛而为

$$\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx=\Gamma(s),$$

因此有

$$\mathscr{M}\ e^{-x}=\Gamma(s)\big|_{\mathscr{R}\ s>0} \tag{70}$$

又当 $0<\mathscr{M}\ s<1$ 时 $\cos x$ 的 Mellin 积分绝对收敛：

$$\int_0^{\infty}\cos x\cdot x^{s-1}dx=\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2};$$

而右端函数解析地扩张至整个半平面 $\mathscr{R}\ s\geqslant 1$ 而仍为有限阶，因此

$$\mathscr{M}\ \cos x=\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\bigg|_{\mathscr{R}\ s>0}. \tag{71}$$

同理可得

$$\mathscr{M}\ \sin x=\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}\bigg|_{\mathscr{R}\ s>-1}, \tag{72}$$

$$\mathscr{M}\ J_\nu(x)=\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{s}{2}+1\right)}\Bigg|_{\mathscr{R}\ s>-\nu} \tag{73}$$

关于古典的 Mellin 变换论及其具体实例，见[1]．

函数 e^x 的 Mellin 积分发散．但因 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，并且此级数在空间 P' 的极限定义下头

收敛(即对一切 $\varphi\in\mathbf{P}$ 而言 $\left(\sum_{n=0}^{j}\frac{x^n}{n!},\varphi\right)\to(e^x,\varphi),(j\to\infty)$). 因此由(68)及广义 Mellin 变换的连续性知当 $j\to\infty$ 时, $\mathscr{M}\left(\sum_{n=0}^{j}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{j}\frac{1}{n!}\delta_{(-n)}\to\mathscr{M}\ e^x(\mathbf{Q}')$, 写为

$$\mathscr{M}\ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta_{(-n)}. \tag{74}$$

同样也可知

$$\mathscr{M}\ e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\delta_{(-n)}. \tag{75}$$

因此比较(54),(70),(75)得

$$\Gamma(s)|_{\mathscr{R}\,s>0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\delta_{(-n)}=\Gamma(s)|_{-m-1<\mathscr{R}\,s<-m}+\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{n!}\delta_{(-n)}. \tag{76}$$

根据 Mellin 变换的定义 3 以及基本空间 P,Q 内的线性运算规律极易导出

$$\mathscr{M}\ (x^\beta F[ax^c])=\frac{1}{|c|}a^{-\frac{s+\beta}{c}}\mathscr{M}\ F\left[\frac{s+\beta}{c}\right], \tag{77}$$

$$\mathscr{M}\ F[ax]=a^{-s}\mathscr{M}\ F,\quad \mathscr{M}\ x^\beta F=\mathscr{M}\ F[s+\beta], \tag{78}$$

$$\mathscr{M}\ [x^c]=\frac{1}{|c|}\mathscr{M}\ F\left[\frac{s}{c}\right],\mathscr{M}\ F[x^{-1}]=\mathscr{M}\ F[-s]. \tag{79}$$

$$\mathscr{M}\ F^*=\mathscr{M}\ x^{-1}F[x^{-1}]=\mathscr{M}\ F[1-s], \tag{80}$$

$$\mathscr{M}\ D_xF=-(s-1)\cdot\mathscr{M}\ F[s-1].$$

$$\mathscr{M}\ D_x^pF=(-1)^p(s-1)(s-2)\cdots(s-p)\mathscr{M}\ F[s-p], \tag{81}$$

$$\mathscr{M}\ (xD_x)F=-s\mathscr{M}\ F,\quad \mathscr{M}\ (D_xx)F=-(s-1)\mathscr{M}\ F, \tag{82}$$

$$\mathscr{M}\ (\log xF)=D_s\mathscr{M}\ F,\quad \mathscr{M}\ (\log x)^px^\beta=D_s^p\delta_{(-\beta)}. \tag{83}$$

利用类似于 Fourier 变换论中的方法或由指数代换直接应用 Fourier 变换论内的结果可知:设 $G(x)$ 为 P 乘子(即无穷可微函数),则 $\mathscr{M}\ G$ 为 Q 卷子,并对任意 $F\in\mathbf{P}'$ 有

$$\mathscr{M}\ (GF)=\mathscr{M}\ G*\mathscr{M}\ F. \tag{84}$$

更设 $\mathscr{M}\ G=g(s)|_{\mathscr{R}\,s=h}$, $\mathscr{M}\ F=f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k}$ 并且 $f(s),g(s)$ 满足适当的解析条件(见 §1 末),则有

$$\mathscr{M}\ (GF)=\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}g(s-z)f(z)dz|_{\mathscr{R}\,s=h+k} \tag{85}$$

2.2　我们来讨论一些特殊广义函数类的 Mellin 变换. 综合为下面一个定理.

定理 3　设 $F\in\mathbf{P}'$

1) $x^kF\in\mathbf{PS}'$ 的充要条件为 $\mathscr{M}\ F=W|_{\mathscr{R}\,s=k}$,此处 $W\in\mathbf{S}'[t]$,并且 $W=\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ x^kF$①;

2) $x^kF\in\mathbf{PS}'_c$ 的充要条件为 $\mathscr{M}\ F=f(s)|_{\mathscr{R}\,s=k}$,此处 $f(s)=f(k+it)$ 为 t 的无穷可微函数,其各级微商 $D_t^pf(k+it)$ 均为有限阶,即 $f(k+it)\in\mathbf{S}'_m[t]$;

---

① 基本空间 $\mathbf{S}[u],S[t]$ 的 Fourier 变换, $\mathscr{F}\ \chi,\mathscr{F}^{-1}\xi$ 定义见(26),(27). 空间 $\mathbf{S}'[u],\mathbf{S}'[t]$ 的 Fourier 变换定为

$$(\mathscr{F}\ V,\mathscr{F}\ \chi)=(V,\chi),\quad V\in\mathbf{S}'[u],\quad \mathscr{F}\ V\in\mathbf{S}'[t],$$

$$(\mathscr{F}^{-1}W,\mathscr{F}^{-1}\xi)=(W,\xi),\quad W\in\mathbf{S}'[t],\quad \mathscr{F}^{-1}W\in\mathbf{S}'[u].$$

函数型的 S 广义函数 $V(u)\in\mathbf{S}'[u]$ 及 $W=W(t)\in\mathbf{S}'[t]$ 分别界定为

$$(V,\chi)=\int_{-\infty}^{\infty}V(u)\chi(u)du,\quad (W,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(t)\xi(t)dt.$$

3) 设 Ω 为实轴 $-\infty<\sigma<+\infty$ 上的一个开区间．于是对一切 $\sigma\in\Omega$ 有 $x^{\sigma}F\in\mathbf{PS}$ 的充要条件为 $\mathscr{M}\ F=f(s)|_{\mathscr{R}\ s\in\Omega}$，此处 $f(s)$ 为开径区 $\mathscr{R}\ s\in\Omega$ 内的有限阶解析函数；

4) $F\in\mathbf{PE}'$（即 F 具相对紧密支集）的充要条件为 $\mathscr{M}\ F=f(s)$，此处 $f(s)$ 为有限阶整解析函数并满足

$$|f(s)|\leqslant Ae^{B|\sigma|}(1+t^2)^q. \tag{86}$$

证 1) 因 $x^kF\in\mathbf{PS}'\Leftrightarrow\mathscr{E}\ x^kF\in\mathbf{S}'[u]\Leftrightarrow\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ x^kF=W\in\mathbf{S}'[t]$. 故根据

$$\begin{aligned}(\mathscr{M}\ F,\mathscr{M}\ \varphi)_{\mathrm{Q}}&=(F,\varphi)_{\mathrm{P}}=(x^kF,x^{-k}\varphi)_{\mathrm{P}}=(x^kF,x^{-k}\varphi)_{\mathrm{PS}}\\&=(\mathscr{E}\ x^kF,\mathscr{E}\ x^{-k}\varphi)_{\mathrm{S}[u]}=(\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ x^kF,\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ x^{-k}\varphi)_{\mathrm{S}[t]}\\&=(\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ x^kF,\mathscr{M}\ \varphi(k+it))_{\mathrm{S}[t]}=(W,\mathscr{M}\ \varphi(k+it))_{\mathrm{S}[t]}\\&=(W|_{\mathscr{R}\ s=k},\mathscr{M}\ \varphi)_{\mathrm{Q}}\quad ①.\end{aligned}$$

因此 1) 成立．

2) 根据 $\mathscr{E}\ (\mathbf{PS}_c')=\mathbf{S}_c'$ 及 $\mathscr{F}\ \mathbf{S}_c'=\mathbf{S}_m'$ ② 可知 $x^kF\in\mathbf{PS}_c'\Leftrightarrow\mathscr{E}\ x^kF\in\mathbf{S}_c'[u]\Leftrightarrow\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ x^kF\in\mathbf{S}_m'[t]$，即 $\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ x^kF=W=f(k+it)$，此处 $f(k+it)\in\mathbf{S}_m'[t]$. 由此以及 1) 即得 2).

3)Schwartz 曾证明③，设 Ω 为实轴上的开集，$V\in\mathbf{K}'[u]$，并对一切 $\sigma\in\Omega$ 有 $e^{\sigma u}V\in\mathbf{S}'[u]$，则对一切 $\sigma\in\Omega$ 有 $e^{\sigma u}V\in\mathbf{S}_c'[u]$，而其 Fourier 变换函数 $\mathscr{F}\ e^{\sigma u}V=f(\sigma+it)=f(s)$ 当视为复变数 $s=\sigma+it$ 的函数时，在开径区 $\mathscr{R}\ s\in\Omega$ 内为有限阶解析．将此与 2) 中的必要性结合即证明了 3) 中的必要性．反之，已经 $f(s)$ 在径区 $\mathscr{R}\ s\in\Omega$ 为有限阶解析，则其各级微商 $D_s^rf(s)$ 亦在 $\mathscr{R}\ s\in\Omega$ 内为有限阶解析，因此引用 2) 中的充分性部分即证得 3) 中的充分性．

4)$F\in\mathbf{PE}'\Leftrightarrow\mathscr{E}\ F\in\mathbf{E}'[u]$. 而后者由 Paley-Wiener-Schwartz 定理④. 又等价于说 Fourier 变换函数 $\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ F=f(it)$ 可以扩张整解析函数 $f(s)$ 满足条件(86). 因此 $F\in\mathbf{PE}'$ 等价于说 $\mathscr{M}\ F=f(s)|_{\mathscr{R}\ s=0}=f(s)|_{\mathscr{R}\ s=k}$（$k$ 任意），即 $\mathscr{M}\ F=f(s)$.

§3 乘式卷积

3.1 在数学分析里常用到下列两种卷积积分

$$\int_0^{\infty}G(xy^{-1})F(y)y^{-1}dy,\qquad\int_0^{\infty}G(xy)F(y)dy. \tag{87}$$

我们分别以 $G(x)\vee F(x)$，$G(x)\wedge F(x)$ 记之．如果 $G(x)$，$F(x)$ 的古典 Mellin 变换为

$$g(s)=\int_0^{\infty}G(x)x^{s-1}dx,\qquad f(s)=\int_0^{\infty}F(x)x^{s-1}dx$$

则这两种卷积的 Mellin 变换为

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}(G(x)\vee F(x))x^{s-1}dx=g(s)f(s),\\&\int_0^{\infty}(G(x)\wedge F(x))x^{s-1}dx=g(s)f(1-s),\end{aligned} \tag{88}$$

① 括号右下角的记号代表数积所取的空间．

② 见[2]，124 页．

③ 见[3].

④ 见[2]或[5]§7.5 定理 5.

许多古典的积分变换例 Fourier 正弦余弦变换，Hankel 变换，以及一般的 Watson 变换等均表为 $G \wedge F$ 的形式，而关系(88)对这种变换的研究有重要的意义．这些关系很容易地可推广至广义函数．

设 $G,F \in \mathbf{P}'$，在一定条件之下可以形式地界定第一种乘法卷积 $G \vee F \in \mathbf{P}'$ 及第二种乘法卷积 $G \wedge F \in \mathbf{P}'$ 如下：

$$(G \vee F,\varphi) = (F[x],(G[y],\varphi(xy))),\quad \varphi \in \mathbf{P}', \tag{89}$$

$$(G \wedge F,\varphi) = (F[x],(G[y],x^{-1}\varphi(x^{-1}y))),\quad \varphi \in \mathbf{P}', \tag{90}$$

但因

$$\begin{aligned}(F[x],(G[y],x^{-1}\varphi(x^{-1}y))) &= (x^{-1}F[x^{-1}],(G[y],\varphi(xy))) \\ &= (F^*[x],(G(y),\varphi(x,y))),\end{aligned}$$

故形式上有

$$G \wedge F = G \vee F^*, \tag{91}$$

即第二种乘法卷积可以归结第一种乘法卷积．第二种形式的卷积应用较广，但讨论时以第一种较便．

命 $x = e^u, y = e^v$，于是因

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(G[y],\varphi(xy))(u) &= e^u(G[y],\varphi(e^u y)) = e^u(\mathscr{E}G[v],e^v\varphi(e^u e^v)) \\ &= (\mathscr{E}G[v],e^{u+v}\varphi(e^{u+v})) = (\mathscr{E}G[v],\mathscr{E}\varphi(u+v)),\\ (\mathscr{E}(G \vee F)\mathscr{E}\varphi) &= (\mathscr{E}F[u],\mathscr{E}(G[y],\varphi(xy))(u)) \\ &= (\mathscr{E}F[u],(\mathscr{E}G[v],\mathscr{E}\varphi(u+v))) \\ &= (\mathscr{E}G * \mathscr{E}F,\mathscr{E}\varphi),\end{aligned}$$

故形上有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(G \vee F) &= \mathscr{E}G * \mathscr{E}F,\\ \mathscr{E}(G \wedge F) &= \mathscr{E}G * e^{-u}\mathscr{E}F[-u].\end{aligned} \tag{92}$$

因此半直线上广义函数的乘法卷积实际相当于全直线上广义函数的加法卷积，而对后者 Schwartz 已有研究，我们将应用 Schwartz 的结果并作一些推广．

Schwartz① 对 $R \in \mathbf{S}'_c, T \in \mathbf{S}'$ 界定加法卷积 $R * T \in \mathbf{S}'$ 为

$$(R * T,\chi) = (T[u],(R[v],\chi(u+v))).$$

又更一般些，设对 σ 而言 $e^{\sigma u}R \in \mathbf{S}'_c, e^{\sigma u}T \in \mathbf{S}'$，则界定 $R * T = e^{-\sigma u}(e^{\sigma u}R * e^{\sigma u}T)$，并且这个定义与 σ 的可能的选择无关．又设 $T \in \mathbf{K}'$，则一切使 $e^{\sigma u}T \in \mathbf{S}'$ 的实数 σ 组成一个凸集 $\Lambda(T)$；并且，设 σ 为 $\Lambda(T)$ 的内点则 $e^{\sigma u}T \in \mathbf{S}'_c$. 据此我们取下列定义

定义 4 设 $G \in \mathbf{PS}'_c, F \in \mathbf{PS}'$，则按式(89)界定 $G \vee F \in \mathbf{PS}'$. 设 $G \in \mathbf{PS}'_c, F^* \in \mathbf{PS}'$，则界定 $G \wedge F = G \vee F^* \in \mathbf{PS}'$，亦即按式(90)界定 $G \wedge F$. 设 $G,F \in \mathbf{P}'$，而存在实数 k 使得 $x^kG \in \mathbf{PS}'_c, x^kF \in \mathbf{PS}'$，则界定 $G \vee F = x^{-k}(x^kG \vee x^kF) \in \mathbf{P}'$. 设 $G,F \in \mathbf{P}'$ 而存在实数 k 使得 $x^kG \in \mathbf{PS}'_c, x^kF^* = (x^{-k}F)^* \in \mathbf{PS}'$，则界定 $G \wedge F = G \vee F^* = x^{-k}(x^kG \vee x^kF^*) \in \mathbf{P}'$.

注意这里的定义是单义的，即与 k 选取无关．又显然有

① 见[4].

$$x^k(G \vee F) = x^k G \vee x^k F, \tag{93}$$

$$x^k(G \wedge F) = x^k G \wedge x^{-k} F, \tag{94}$$

这些等式应了解如下：如果一边的卷积有意义，则另一边的也有意义而且两边相等．又卷积具有连续性：设 $x^k F_j \to 0(\mathbf{PS}')$，则 $x^k(G \vee F_j) \to 0(\mathbf{PS}')$，而 $G \vee F_j \to 0(\mathbf{P}')$．同样，设 $x^k F_j^* \to 0(\mathbf{PS}')$，则 $x^k(G \wedge F_j) \to 0(\mathbf{PS}')$，而 $G \wedge F_j \to 0(\mathbf{P}')$．

PS 卷积是普通的卷积积分的推广，设有函数型的广义函数 $G = G(x)$，$F = F(x)$，并设 $x^k G \in \mathbf{PS}'_c$，$x^k F^* \in \mathbf{PS}'$．于是按定义 4 $G \wedge F$ 有意义，即为

$$\begin{aligned}(G \wedge F, \varphi) &= (x^{-k}(x^k G \wedge x^{-k} F^*), \varphi) = (x^k G \wedge x^{-k} F, x^{-k}\varphi) \\ &= (y^{-k}F(y), (x^k G(x), y^{-1}(xy^{-1})^{-k}\varphi(xy^{-1}))) \\ &= \int_0^\infty y^{-k}F(y)dy \int_0^\infty x^k G(x) x^{-k} y^k \varphi(xy^{-1}) y^{-1} dx \\ &= \int_0^\infty F(y)dy \int_0^\infty G(xy)\varphi(x)dx, \quad (\varphi \in \mathbf{P}).\end{aligned} \tag{95}$$

今假设

$$\int_0^\infty |G(xy)F(y)|dy < \infty, \quad (\text{对 } x \text{ 而言几乎到处}). \tag{96}$$

并设它界定一个在 $(0,\infty)$ 上为局部绝对可积的函数．于是有

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty |G(xy)F(y)\varphi(x)|dy < \infty,$$

因此(95) 积分号可以调换而得

$$(G \wedge F, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)dx \int_0^\infty G(xy)F(y)dy, \quad (\text{对一切 } \varphi \in \mathbf{P})$$

因此

$$G \wedge F = \int_0^\infty G(xy)F(y)dy \tag{97}$$

注意，在一般情况下对积分(96) 所加的条件都是被满足的．在类似的条件下也有

$$G \vee F = \int_0^\infty G(xy^{-1})F(y)y^{-1}dy. \tag{98}$$

定理 4 设 $x^k G \in \mathbf{PS}'_c$，$x^k F \in \mathbf{PS}'$，则

$$\mathscr{M}(G \vee F) = g(k+it) \cdot f[k+it]|_{\mathscr{R} s=k}. \tag{99}$$

此处

$$\mathscr{M} G = g(k+it)|_{\mathscr{R} s=k}, \quad g(k+it) \in \mathbf{S}'_m[t], \tag{100}$$

$$\mathscr{M} F = f[k+it]|_{\mathscr{R} s=k}, \quad f[k+it] \in \mathbf{S}'[t], \tag{101}$$

而 $g(k+it) \cdot f[k+it] \in \mathbf{S}'[t]$ 为空间 $\mathbf{S}'[t]$ 内的乘积．

证 根据定义 $x^k(G \vee F) = x^k G \vee x^k F$ 有

$$\mathscr{E} x^k(G \vee F) = \mathscr{E} x^k G \vee \mathscr{E} x^k F.$$

作 Fourier 变换，命

$$\mathscr{F} \mathscr{E} x^k G = g(k+it) \in \mathbf{S}'_m[t], \quad \mathscr{F} \mathscr{E} x^k F = f[k+it] \in \mathbf{S}'[t].$$

乃有

$$\mathscr{F} \mathscr{E} x^k(G \vee F) = g(k+it) \cdot f[k+it] \in \mathbf{S}'[t].$$

根据定理 3

$$\begin{aligned}(\mathscr{M}\ (G \vee F), \psi) &= (\mathscr{F}\ \mathscr{E}\ x^k(G \vee F), \psi(k+it))_{S[t]} \\ &= (g(k+it) \cdot f[k+it], \psi(k+it))_{S[t]} \\ &= (g(k+it)f[k+it]|_{\mathscr{R}\ s=k}, \psi)_Q\end{aligned}$$

3.2 设 $F \in \mathbf{P}'$，命 $\Lambda(F)$ 为由一切使 $x^\sigma F \in \mathbf{PS}'$ 的实数 σ 所组成的集．(可能是空集)，它恒为凸集．命 $\Omega(F)$ 为 $\Lambda(F)$ 的内点集．如 $\sigma \in \Omega(F)$，则 $x^\sigma F \in \mathbf{PS}'_c$. 因此，如果对 $F_1, F_2 \in \mathbf{P}'$ 而言有 $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \neq 0$(即非空)，则 $F_1 \vee F_2$ 恒单义地界定．如果 $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2^*) \neq 0$，则 $F_1 \wedge F_2$ 恒单义地界定．下面将只讨论这种意义的卷积．

根据定理 3 立即可得

定理 5 集 $\Omega(F)$ 为实轴 $-\infty < \sigma < +\infty$ 上最大的开区间 Ω 使得在开径区内存在有限阶的解析函数 $f(s)$ 满足

$$\mathscr{M}\ F = f(s)|_{\mathscr{R}\ s \in \Omega}.$$

定理 6 设 $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \neq 0$，则

$$\mathscr{M}\ (F_1 \vee F_2) = f_1(s) f_2(s)|_{\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2)}; \tag{102}$$

设 $\Omega(F_1) \cap \Omega^*(F_2) \neq 0$，则

$$\mathscr{M}\ (F_1 \wedge F_2) = f_1(s) f_2(1-s)|_{\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_1) \cap \Omega^*(F_2)}; \tag{103}$$

此处

$$\mathscr{M}\ F_1 = f_1(s)|_{\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_1)}, \tag{104}$$

$$\mathscr{M}\ F_2 = f_2(s)|_{\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_2)}. \tag{105}$$

$\Omega^*(F_1)$ 为集 $\Omega(F_1)$ 经过变换 $\sigma \to 1-\sigma$ 所得的集．

证 任取 $k \in \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2)$，于是由定理 4 及

$$\mathscr{M}\ F_1 = f_1(s)|_{\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_1)} = f_1(s)|_{\mathscr{R}\ s=k}$$

$$\mathscr{M}\ F_2 = f_2(s)|_{\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_2)} = f_2(s)|_{\mathscr{R}\ s=k}$$

可知

$$\mathscr{M}\ (F_1 \vee F_2) = f_1(s) f_2(s)|_{\mathscr{R}\ s=k}. \tag{106}$$

但 $f_1(s), f_2(s)$ 各在径区 $\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_1)$，$\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_2)$ 内为有限阶解析，因此其积 $f_1(s)f_2(s)$ 至少在径区 $\mathscr{R}\ s \in \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2)$ 内为有限阶解析，因此由式(106)得式(102). 定理的第二部分可以从定理的第一部分导出，只须注意 $F_1 \wedge F_2 = F_1 \vee F_2^*$ 而根据(80)，(58)有

$$\mathscr{M}\ F_2^* = \mathscr{M}\ F_2[1-s] = f_2(1-s)|_{\mathscr{R}\ s \in \Omega^*(F_2)}. \tag{107}$$

此处 Ω^* 表示集 Ω 对变换 $\sigma \to 1-\sigma$ 的映像．

这个定理也可视为古典理论中的公式(88)的推广

定理 7 设 $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \neq 0$，则有

$$F_1 \vee F_2 = F_2 \vee F_1, \quad \text{(交换律)} \tag{108}$$

$$(F_1 \vee F_2)^* = F_1^* \vee F_2^*, \tag{109}$$

$$x^\beta(F_1 \vee F_2) = x^\beta F_1 \vee x^\beta F_2, \tag{110}$$

设 $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \cap \Omega(F_3) \neq 0$，则

$$F_1 \vee (F_2 \vee F_3) = (F_1 \vee F_2) \vee F_3 \quad \text{(结合律)}. \tag{111}$$

设 $\Omega(F_1) \cap \Omega^*(F_2) \neq 0$，则有

$$(F_1 \wedge F_2)^* = F_2 \wedge F_1, \quad (\text{交换关系}) \tag{112}$$

$$x^\beta(F_1 \wedge F_2) = x^\beta F_1 \wedge x^{-\beta} F_2. \tag{113}$$

设 $\Omega(F_1) \cap \Omega^*(F_2) \cap \Omega(F_3) \neq 0$，则

$$F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3) = ((F_2 \wedge F_1)^* \wedge F_3)^*, \quad (\text{结合关系}). \tag{114}$$

证 根据定理 5 以及(107)，(78)，(57) 极易导出(108)—(110)，(112)、(113)，又不难验证

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\ (F_1 \vee (F_2 \vee F_3)) &= f_1(s) f_2(s) f_3(s)\,|_{\mathscr{R}\ s\in\Omega(F_1)\cap\Omega(F_2)\cap(F_3)} \\ &= \mathscr{M}\ ((F_1 \vee F_2) \vee F_3),\end{aligned}$$

因此式(111) 成立，又

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\ (F_2 \wedge F_3)^* &= (f_2(s) f_3(1-s)\,|_{\mathscr{R}\ s\in\Omega(F_2)\cap\Omega^*(F_3)})[1-s] \\ &= f_2(1-s) f_3(s)\,|_{\mathscr{R}\ s\in\Omega^*(F_2)\cap\Omega(F_3)},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\ (F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)) &= \mathscr{M}\ (F_1 \vee (F_2 \wedge F_3)^*) \\ &= f_1(s) f_2(1-s) f_3(s)\,|_{\mathscr{R}\ s\in\Omega(F_1)\cap\Omega(F_2)\cap\Omega(F_3)}.\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\ ((F_2 \wedge F_1) \wedge F_3)^* &= (f_2(s) f_1(1-s) f_3(1-s)\,|_{\mathscr{R}\ s\in\Omega(F_2)\cap\Omega^*(F_1)\cap\Omega^*(F_3)})[1-s] \\ &= f_1(s) f_2(1-s) f_3(s)\,|_{\mathscr{R}\ s\in\Omega(F_1)\cap\Omega^*(F_2)\cap\Omega(F_3)},\end{aligned}$$

因此式(114) 成立．

我们即使不用 Mellin 变换的工具而直接从 P，PS 广义函数理论本身也很容易推导上列结果．但要进一步讨论两个以上因子的卷积时，Mellin 变换的工具似为不可少．

上面第一种卷积的结合律(4.53) 是在条件

$$\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \cap \Omega(F_3) \neq 0 \tag{115}$$

之下成立．但事实上在较弱的条件

$$\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2 \vee F_3) \neq 0, \quad \Omega(F_1 \vee F_2) \cap \Omega(F_3) \neq 0 \tag{116}$$

之下，二重卷积 $F_1 \vee (F_2 \vee F_3)$ 及 $(F_1 \vee F_2) \vee F_3$ 仍分别有意义．自然会问，此时结合律是否仍然成立，或者如果不成立则应作怎样的修正．对第二种卷积的结合关系也有类似的情况．下面的定理回答这个问题．

定理 8 设 $F_1, F_2, F_3 \in \mathbf{P}'$，

$$\mathscr{M}\ F_j = f_j(s)\,|_{\mathscr{R}\ s\in\Omega(F_j)}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{117}$$

设

$$\Omega_a = \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2 \vee F_3) \neq 0, \quad \Omega_b = \Omega(F_1 \vee F_2) \cap \Omega(F_3) \neq 0, \tag{118}$$

并设积函数 $f_1(s) f_2(s) f_3(s)$ 在径区 $\mathscr{R}\ s \in \Omega_a$ 与 $\mathscr{R}\ s \in \Omega_b$ 的"间隙"中只有有限多个极点 $\beta_1, \cdots, \beta_m$，并且仍保持为有限阶．于是

$$\begin{aligned}&F_1 \vee (F_2 \vee F_3) \\ &= (F_1 \vee F_2) \vee F_3 \pm \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{q_k} (-1)^{p-1} \frac{b_{k,-p}}{(p-1)!} (\log x)^{p-1} x^{-\beta_k},\end{aligned} \tag{119}$$

此处 $b_{k,-p}$ $(k = 1, \cdots, m;\ p = 1, \cdots, q_k)$ 为函数 $f_1(s) f_2(s) f_3(s)$ 在极点 $s = \beta_k$ 处的 Laurent 展式中负幂项 $\dfrac{1}{(s-\beta_k)^p}$ 的系数，符号 $+$ 或 $-$ 则视区间 Ω_a 在区间 Ω_b 的右或左而定．

特别有，如果 $\Omega_a \cap \Omega_b \neq 0$ 或在径区 $\mathscr{R} s \in \Omega_a$ 与 $\mathscr{R} s \in \Omega_b$ 的间隙中函数 $f_1(s)f_2(s)f_3(s)$ 无异点，则

$$F_1 \vee (F_2 \vee F_3) = (F_1 \vee F_2) \vee F_3. \tag{120}$$

同样，设

$$\Omega_c = \Omega(F_1) \cap \Omega^*(F_2 \wedge F_3) \neq 0, \quad \Omega_d = \Omega^*(F_2 \wedge F_1) \cap \Omega(F_3) \neq 0, \tag{121}$$

并设积函数 $f_1(s)f_2(1-s)f_3(s)$ 在径区 $\mathscr{R} s \in \Omega_c$ 与 $\mathscr{R} s \in \Omega_d$ 的"间隙"中只有有限多个极点 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，并且仍保持为有限阶．于是

$$\begin{aligned} F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3) &= ((F_2 \wedge F_1) \wedge F_3)^* \\ &\pm \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{q_k} (-1)^{p-1} \frac{a_{k,-p}}{(p-1)!} (\log x)^{p-1} x^{-\alpha_k}. \end{aligned} \tag{122}$$

此处 $a_{k,-p}(k=1,\cdots,n; p=1,\cdots,q_k)$ 为函数 $f_1(s)f_2(1-s)f_3(s)$ 在极点 $s=\alpha_k$ 的 Laurent 展式中负幂项 $\frac{1}{(s-\alpha_k)^p}$ 的系数，符号 $+$ 或 $-$ 则视区间 Ω_c 在区间 Ω_d 的右或左而定．

特别有，如果 $\Omega_c \cap \Omega_d \neq 0$ 或在径区 $\mathscr{R} s \in \Omega_c$ 与 $\mathscr{R} s \in \Omega_d$ 的"间隙"中无异点，则

$$F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3) = ((F_2 \wedge F_1) \wedge F_3)^*. \tag{123}$$

证 根据条件(118)知 $F_1 \vee (F_2 \vee F_3)$ 及 $(F_1 \vee F_2) \vee F_3$ 分别有意义．由(117)及定理 6 得

$$\mathscr{M}(F_2 \vee F_3) = f_2(s)f_3(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega(F_2) \cap \Omega(F_3)} = f_2(s)f_3(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega(F_2 \vee F_3)},$$

$$\mathscr{M}(F_1 \vee F_2) = f_1(s)f_2(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2)} = f_1(s)f_2(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega(F_1 \vee F_2)},$$

于是

$$\mathscr{M}(F_1 \vee (F_2 \vee F_3)) = f_1(s)f_2(s)f_3(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega_a}, \tag{124}$$

$$\mathscr{M}((F_1 \vee F_2) \vee F_3) = f_1(s)f_2(s)f_3(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega_b}, \tag{125}$$

根据我对函数 $f_1(s)f_2(s)f_3(s)$ 所加的条件及定理 2 得

$$\begin{aligned} & f_1(s)f_2(s)f_3(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega_a} \\ &= f_1(s)f_2(s)f_3(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega_b} \pm \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f_1(s)f_2(s)f_3(s))|_{s=\beta_k}. \end{aligned}$$

但根据(50)(69)有

$$\operatorname{Res}(f_1(s)f_2(s)f_3(s))|_{\mathscr{R} s=\beta_k} = \mathscr{M}\left(\sum_{p=1}^{q_k} (-1)^{p-1} \frac{b_{k,-p}}{(p-1)!} (\log x)^{p-1} x^{-\beta_k}\right) \tag{126}$$

因此，比较(124)(125)(126)即得(119)．

同样，在条件(121)之下 $F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)$ 及 $(F_2 \wedge F_1) \wedge F_3$ 分别有意义，并且不难见到

$$\mathscr{M}(F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)) = f_1(s)f_2(1-s)f_3(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega_c}, \tag{127}$$

$$\mathscr{M}((F_2 \wedge F_1) \wedge F_3) = f_1(1-s)f_2(s)f_3(1-s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega_d^*}$$

$$\mathscr{M}((F_2 \wedge F_1) \wedge F_3)^* = f_1(s)f_2(1-s)f_3(s)|_{\mathscr{R} s \in \Omega_d} \tag{128}$$

由此根据类似于前的推理即得(122)．

这个结果有多方面的应用，将于以后的论文中讨论．只指出实际上它是许多外表不同的情况的抽象的统一．这种内在的统一性是华罗庚先生指出的．

3.3　要能运用广义函数PS卷积的形式工具自然首先要确定广义函数 F 的有关的集

$\Lambda(F)$ 及 $\Omega(F)$. 确定集合 $\Lambda(F)$,$\Omega(F)$ 的问题有时可以是很难的. 但即使不能完全确定时至少也要对之作适当的估计,或判定某数 k 是否属于 $\Lambda(F)$ 或 $\Omega(F)$. 通常可以循两种不同的途径来确定或估计:

(A)"初等"的方法,从空间 $\mathbf{P}'$ 本身来考虑问题 —— 根据定义,以及一些相关的命题(如 §1,第 1.2 中所述).

(B)"超越"的方法,从 Mellin 变换空间 $\mathscr{M}\ \mathbf{P}' = \mathbf{Q}'$ 来考虑问题 —— 根据 Mellin 变换及定理 5 等等.

举例如下:

1° $F = x^\beta \Lambda(x^\beta) = \{-\mathscr{R}\,\beta\}$,即由 $-\mathscr{R}\,\beta$ 一个点组成,$\Omega(x^\beta) = 0$ (空集). 盖当 $\sigma = -\mathscr{R}\,\beta$ 时 $x^\sigma x^\beta = x^{i\vartheta\beta} \in \mathbf{PS}'$ 而当 $\sigma \neq -\mathscr{R}\,\beta$ 时 $x^\sigma x^\beta \notin \mathbf{PS}'$.

2° $F = F(x)$ 而 $x^{k-1}F(x) \in L(0,\infty)$ 或 $L^2(0,\infty)$,则 $k \in \Lambda(F)$. 盖此时不难验证

$$(F,\varphi) = \int_0^\infty x^k F(x)\varphi(x)dx < \infty \quad (\varphi \in \mathbf{PS}),$$

$$(F,\varphi_j) = \int_0^\infty x^k F(x)\varphi_j(x)dx \to 0 \quad (\varphi_j \to \mathbf{PS}),$$

因此 $x^k F \in \mathbf{PS}'$.

3° $F = F(x)$ 而 $x^k F(x)$ 有界,或更一般些存在 A,B 使得

$$|x^k F(x)| \leqslant A(1 + |\log x|^2)^B,$$

则 $k \in \Lambda(F)$.

下面一些简单的事实对于决定集 $\Lambda(F)$ 及 $\Omega(F)$ 的问题是有帮助的. 根据定理 5 及 6 直接可知:设 $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \neq 0$,则

$$\Omega(F_1 + F_2) \supset \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2),$$

$$\Omega(F_1 \vee F_2) \supset \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2).$$

设 $\Omega(F_1) \cap \Omega^*(F_2) \neq 0$,则

$$\Omega(F_1 \wedge F_2) \supset \Omega(F_1) \cap \Omega^*(F_2).$$

设将 $F \in \mathbf{P}'$ 变为 $x^\beta F[ax^c]$(β 复数,$a > 0$,c 实数 $\neq 0$)则其 Λ 集亦作相应的简单的变换,盖设 $\sigma \in \Lambda(F)$,即 $x^\sigma F \in \mathbf{PS}'$ 于是 $(x^\sigma F)[ax^c] = a^\sigma x^{c\sigma} F[ax^c] \in \mathbf{PS}'$(见定理 3),即 $x^{c\sigma}F[ax^c] \in \mathbf{PS}'$. 但又因 $x^{i\vartheta\beta}$ 为 $\mathbf{PS}$ 乘子,故 $x^{i\vartheta\beta} \cdot x^{c\sigma}F[ax^c] = x^{c\sigma-\mathscr{R}\,\beta} x^\beta F[ax^c] \in \mathbf{PS}'$. 因此 $\sigma' = c\sigma - \mathscr{R}\,\beta \in \Lambda(x^\beta F[ax^c])$. 循相反的途径亦可知:设 $\sigma' = c\sigma - \mathscr{R}\,\beta \in \Lambda(x^\beta F[ax^c])$,则 $\sigma \in \Lambda(F)$. 因此有

$$\Lambda(x^\beta F[ax^c]) = \{\sigma' \mid \sigma' = c\sigma - \mathscr{R}\,\beta, \sigma \in \Lambda(F)\}.$$

作为特例则有

$$\Lambda(F[ax]) = \Lambda(F),$$

$$\Lambda(x^\beta F) = \{\sigma' \mid \sigma' - \mathscr{R}\,\beta, \sigma \in \Lambda(F)\},$$

$$\Lambda(F^*) = \Lambda^*(F) = \{\sigma' \mid \sigma' = 1 - \sigma, \sigma \in \Lambda(F)\},$$

注意此处 Λ^* 就是集 Λ 对点 $\sigma = \dfrac{1}{2}$ 的反射映像.

参考文献

[1] Titchmarsh, E., Introduction to the theory of Fourier integrals, 2 ed. 1948, Oxford.

[2] Schwartz, L., Theorie des distributions, II, 1951, Paris.

[3] ——, Transformation de Laplace des distributions, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Supplementband til. M. Riesz, (1952) 196—206.

[4] Гельфанд, И. М., Шилов, Г. Е., Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, Успехи Мат. Наук, 8; 6(1953), 1—54.

[5] 冯康，广义函数论，数学进展，1;3(1955)，405—590.

GENERALIZED MELLIN TRANSFORMS I

The theory of Mellin transforms is extended to the distributions on the half-line $(0,\infty)$.

The distributions on $(0,\infty)(\in \mathbf{P}')$ are linear continuous functionals over the space $\mathbf{P}$ of infinitely differentiable functions with compact supports in $(0,\infty)$. An exponential substitution establishes the isomorphism between $\mathbf{P}$ and $\mathbf{K}$ (viz. $\mathbf{P}'$ and $\mathbf{K}'$).

Let $\mathbf{Q}$ be the space of all integral functions $\psi(s)=\psi(\sigma+it)$ satisfying 1. $|\psi(\sigma+it)|\leqslant Ae^{B|\sigma|}$, 2. $\psi(\sigma+it)\in S[t]$ for each fixed σ; and $\mathbf{Q}'$ be its dual. If $f(s)$ is analytic and of finite order in the stripe $a<\mathscr{R}\, s<b$, then the integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(s)\psi(s)ds \quad (\psi\in \mathbf{Q})$$

is independent of the choice of k in (a,b) and defines a functional $f(s)|_{a<\mathscr{R}\, s<b}\in \mathbf{Q}'$. If $f(s)$ has a pole at $s=\alpha$, the residue functional $\in \mathbf{Q}'$ is defined by

$$(\mathrm{Res} f(s)|_{s=\alpha},\psi)=\mathop{\mathrm{Res}}_{s=\alpha}(f(s)\psi(s)),$$

and we have

$$\mathrm{Res} f(s)|_{s=\alpha}=\sum_{p=1}^{q}\frac{a_{-p}}{(p-1)!}D_t^{p-1}\delta_{(\alpha)},$$

where a_{-p} are Laurent coefficients of $f(s)$ at $s=\alpha$. In general, an analytic function $f(s)$ of finite order may generate different Q-functionals by integrals in different stripes, they are related, however, by

$$f(s)|_{a<\mathscr{R}\, s<b}=f(s)|_{c<\mathscr{R}\, s<d}\pm\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res} f(s)\Big|_{s=\alpha_j}$$

where $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ are the totality of poles of $f(s)$ in the gap between $a<\mathscr{R}\, s<b$ and $c<\mathscr{R}\, s<d$.

Following Gelfand and Šilov, the isomorphism between $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ is given by

$$\psi(s)=\mathscr{M}\,\varphi(s)=\int_0^{\infty}\varphi(x)x^{-s}dx$$

$$\varphi(x)=\mathscr{M}^{-1}\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(s)x^{1-s}ds \quad (k \text{ arbitrary})$$

and the Mellin [inverse Mellin] transforms of $F\in \mathbf{P}'[f\in \mathbf{Q}']$ are given by

$$(\mathscr{M}\,F,\psi)=(F,\mathscr{M}^{-1}\psi),\quad (\mathscr{M}^{-1}f,\varphi)=(f,\mathscr{M}\,\varphi).$$

They coincides with the classical Mellin integrals

$$\int_0^\infty F(x)x^{s-1}dx, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(s)x^{-s}ds$$

if the integrals exist.

The theory of multiplicative convolutions $F_1 \vee F_2, F_1 \wedge F_2$ in $\mathbf{P}'$ is developed along the lines of Schwartz,

$$(F_1 \vee F_2, \varphi) = (F_2[x], (F_1[y], \varphi(xy))),$$

$F_1 \wedge F_2$ is defined as $F_1 \vee F_2^*$, where $F^* = \frac{1}{x}F\left[\frac{1}{x}\right]$. $F_1 \vee F_2$ and $F_1 \wedge F_2$ generalize convolution integrals

$$\int_0^\infty F_1(xy^{-1})F_2(y)y^{-1}dy, \quad \int_0^\infty F_1(xy)F_2(y)dy$$

respectively. Let $\mathbf{PS}'$ be the subspace of $\mathbf{P}'$ which corresponds to the subspace $\mathbf{S}'$ of $\mathbf{K}'$ under the exponential substitution, and $\Omega(F)$ be the interior of the convex set of real numbers σ for which $x^\sigma F \in \mathbf{PS}'$. $\Omega(F)$ is the largest open interval Ω for which there exists $f(s)$ analytic and of finite order in the domain $\mathscr{R}\, s \in \Omega$ and

$$\mathscr{M}\ F = f(s)\,|_{\mathscr{R}\, s \in \Omega}.$$

If $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \neq 0$, then $F_1 \vee F_2$ exists and

$$F_1 \vee F_2 = F_2 \vee F_1, \mathscr{M}\ (F_1 \vee F_2) = f_1(s)f_2(s)\,|_{\mathscr{R}\, s \in \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2)}.$$

$$F_1 \vee (F_2 \vee F_3) = (F_1 \vee F_2) \vee F_3, \text{if } \Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \cap \Omega(F_3) \neq 0.$$

It may happen that $\Omega(F_1) \cap \Omega(F_2) \cap \Omega(F_3) = 0$, but since both $F_1 \vee (F_2 \vee F_3) = F'$ and $(F_1 \vee F_2) \vee F_3 = F''$ exist, then

$$F_1 \vee (F_2 \vee F_3) = (F_1 \vee F_2) \vee F_3 \pm \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{q_j} \frac{a_{j,-p}}{(p-1)!}(\log x)^{p-1}x^{\alpha_j}$$

where $a_{j,-p}$ are Laurent coefficients of $f_1(s)f_2(s)f_3(s)$ at the poles α_j included in the gap between the stripes $\mathscr{R}\, s \in \Omega(F')$ and $\mathscr{R}\, s \in \Omega(F'')$. Similarily we have

$$F_1 \wedge F_2 = (F_2 \wedge F_1)^*, \mathscr{M}\ (F_1 \wedge F_2) = f_1(s)f_2(1-s)\,|_{\mathscr{R}\, s \in \Omega(F_1) \cap \Omega^*(F_2)}.$$

$$F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3) = ((F_2 \wedge F_1) \wedge F_3)^*, \text{if } \Omega(F_1) \cup \Omega^*(F_2) \cap \Omega(F_3) \neq 0,$$

(Ω^* is the image of Ω under the map $\sigma \to 1-\sigma$).

and more generally

$$F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3) = ((F_2 \wedge F_1) \wedge F_3)^* \pm \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{q_j} (-1)^{p-1}\frac{b_{j,-p}}{(p-1)!}(\log x)^{p-1}x^{\beta_j}$$

where $b_{j,-p}$ are Laurent coefficients of $f_1(s)f_2(1-s)f_3(s)$ at the poles β_j in a suitable gap.

Some applications of this formalism and in particular of the convolution relations will be given in a forthcoming paper. The author is grateful to Prof. Hua Loo-keng, who suggested the problem and the leading ideas.