广义函数的泛函对偶关系①

DUALITY RELATIONS IN SPACES OF DISTRIBUTIONS

§1 引　　言②

在广义函数论中所谓基本空间Φ就是由n维空间R^n上的复数值的无穷可微函数φ所组成的，并且有一定的收敛结构（即在Φ内定义了零序列$\varphi_j \to 0(\Phi)$）的复数域上的线性空间并满足下列条件

1° $\varphi \in \Phi$ 蕴涵 $x_k\varphi \in \Phi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in \Phi \quad (k = 1,2,\cdots,n)$.

2° $\varphi_j \to 0(\Phi)$ 蕴涵 $x_k\varphi_j \to 0(\Phi), \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \to 0(\Phi) \quad (k = 1,2,\cdots,n)$.

3° $\varphi_j \to 0(\Phi)$ 蕴涵 $\varphi_j(x)$ 在 R^n 的任意紧密集 A 上一致 $\to 0$③. 基本空间Φ上所有的复数值的连续（即对Φ的收敛定义为连续）线性泛函$T=(T,\varphi)$自然形成一个复数域上的线性空间$\dot{\Phi}$. 空间$\dot{\Phi}$内收敛性系按"弱"方式界定，即如果对一切$\varphi \in \Phi$有$(T_j,\varphi) \to 0$，则说$T_j \to 0(\dot{\Phi})$. 具有这样收敛定义的线性空间$\dot{\Phi}$称为Φ的共轭空间或Φ广义函数空间. $\dot{\Phi}$内的元素就是所谓Φ广义函数.

自然可以在基本空间中引进所谓弱收敛的概念. 我们说$\varphi_j \xrightarrow{\text{弱}} 0(\Phi)$，如果对一切$T \in \dot{\Phi}$有$(T,\varphi_j) \to 0$. 显然可见$\varphi_j \to 0(\Phi)$ 蕴涵 $\varphi_j \xrightarrow{\text{弱}} 0(\Phi)$. 为区别计可称基本空间内本身的收敛性为强收敛. 强弱收敛在概念上迥不相同，但以后 §4 中可以见到，在广义函数论中它们通常是等价的.

对线性空间$\dot{\Phi}$也可以界定其共轭空间$\ddot{\Phi}$，称为空间Φ的第二共轭空间. $\ddot{\Phi}$系由空间$\dot{\Phi}$上所有的连续（对$\dot{\Phi}$的收敛定义而言）线性泛函$L=(T,L)$组成，其收敛定义界定为：$L_j \to 0(\ddot{\Phi})$ 如果对一切$T \in \dot{\Phi}$有$(T,L_j) \to 0$.

广义函数论中基本空间Φ通常具有所谓泛函对偶性或称自反性(reflexivité)，即空间Φ与其第二共轭空间$\ddot{\Phi}$同构. Schwartz[2]首先论证了这种自反性. 他在所考虑的基本空间

---

① 本文载于《数学进展》，Vol. 3，No. 2，pp201-208，1957.

② 本文中所应用的概念，定义及记号均见[1]. 关于一般的概念也可见[2]，[3].

③ 这里基本空间的定义比[1]第1章§1中的定义多一个条件3°. 在实践上所用的基本空间都满足此条件3°.

中引进适当的拓扑使之成为局部凸(localement convexe)拓扑线性空间．然后论证它为所谓 Montel 空间，于是可以应用 Mackey 及 Arens 关于局部凸 Montel 空间的自反性定理[4],[5]. 但在[2]中所引进的拓扑是相当复杂的，一些主要论点仅加叙述而未列证明．在本文中将在广义函数论自身范围内用初等的方法(用到赋范空间的少许最基本的知识)论证自反性．我们先建立一般空间自反性的充分条件(§2)，然后用 δ 函数类的逼近法(§3)及强弱收敛的等价性(§4)来证明广义函数论最常用的基本空间 K,E,S 的自反性①.

§2 自反性的充分条件

我们的目的是建造基本空间 Φ 与其第二共轭空间 $\ddot{\Phi}$ 的同构关系②；即 $\Phi\cong\ddot{\Phi}$. 设 $\varphi\in\Phi$，我们可以界定 $L_\varphi\in\ddot{\Phi}$ 如下：

$$(T,L_\varphi)=(T,\varphi)\quad(T\in\dot{\Phi}),\tag{1}$$

映射 $\varphi\in\Phi\Rightarrow L_\varphi\in\ddot{\Phi}$ 显然是线性的．又因为

$$\varphi(x)=(\delta_{(x)},\varphi)^{③},\tag{2}$$

所以 $L_\varphi=0$ 蕴涵 $\varphi(x)\equiv0$，即映射是一一的．又显然易见 $\varphi_j\to0(\Phi)$ 蕴涵 $L_{\varphi_j}\to0(\ddot{\Phi})$. 因此这是一个一一线性连续映射映 Φ 入 $\ddot{\Phi}$.

反之，对任意 $L\in\ddot{\Phi}$ 我们界定函数 $\varphi_L(x)$ 称为 L 的分布函数如下

$$\varphi_L(x)=(\delta_{(x)},L)\quad(x\in R^n).\tag{3}$$

它是 R^n 上的无穷可微函数即 $\varphi_L\in$ E，并且

$$D^p\varphi_L(x)=D^p(\delta_{(x)},L)=(-1)^{|p|}(D^p\delta_{(x)},L)^{④}.\tag{4}$$

事实上，考虑差分商⑤

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_L(x+h)-\varphi_L(x)}{h}&=\frac{(\delta_{(x+h)},L)-(\delta_{(x)},L)}{h}\\&=\left(\frac{\delta_{(x+h)}-\delta_{(x)}}{h},L\right)\quad(h\neq0).\end{aligned}\tag{5}$$

对于任意固定的 $x\in R^n$ 显然当 $h\to0$ 时有

$$\left(\frac{\delta_{(x+h)}-\delta_{(x)}}{h},\varphi\right)=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\to D\varphi(x)=-(D\delta_{(x)},\varphi)\quad(\varphi\in\Phi),$$

因此

$$\frac{\delta_{(x+h)}-\delta_{(x)}}{h}\to-D\delta_{(x)}\quad(\dot{\Phi}),$$

---

① 见[2]. 该处空间 K 以 D 表示．

② 所谓同构系指除代数意义的线性同构外，还要求对空间 Φ 及 $\ddot{\Phi}$ 的收敛定义而言为双向连续．

③ 我们采用的基本空间定义的条件 3°，保证了 δ 函数 $(\delta_{(a)},\varphi)=\varphi(a)$ 确为 Φ 广义函数，即 $\delta_{(a)}\in\dot{\Phi}$.

④ 我采用记号如下：$p=\{p_1,\cdots,p_n\}$，p_k 均为非负整数，

$$|p|=p_1+\cdots+p_n,\ D^p=\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}},\ D^0f=f,\ D^0T=T.$$

⑤ 为简明计此处写为单变数的情形．

因此式(5)右端 $\to -(D\delta_{(x)},L)$. 即函数 $\varphi_L(x)$ 为可微,并且 $D\varphi_L(x) = -(D\delta_{(x)},L)$. 余类推.

以上作法表明,要建立空间 Φ 与 $\ddot{\Phi}$ 的共构性只待证明下列三层:

1° 设 $L \in \ddot{\Phi}$,则分布函数 $\varphi_L \in \Phi$.

2° $L_{\varphi_L} = L$,亦即对于一切 $T \in \dot{\Phi}$

$$(T,L) = (T,\varphi_L), \tag{6}$$

3° 设 $L_j \to 0(\ddot{\Phi})$,则 $\varphi_{L_j} \to 0(\Phi)$.

命 Δ 为 δ 函数及其各级微商的线性包,即由 $\dot{\Phi}$ 内所有的 $D^p\delta_{(a)} \in \dot{\Phi}$($p$,$a$ 均可任意变)的有限线性组合组成的子空间($\Delta \subset \dot{\Phi}$). 于是在命题 1° 成立的前提下根据(3)及(4)知对于一切 $T \in \Delta$ 而言式(6)成立. 由此可见,如果 Δ 为 $\dot{\Phi}$ 的稠密子空间,即对任意 $T \in \dot{\Phi}$ 必有 $T_j \in \Delta$ 使得 $T_j \to T(\dot{\Phi})$,则由连续性立即得知对于一切 T 而言式(6)成立,亦即命题 2° 成立.

设 $L_j \to 0(\ddot{\Phi})$. 在命题 1°,2° 成立的前提下,显然有 $\varphi_{L_j} \in \Phi$,并且 $\varphi_{L_j} \xrightarrow{\text{弱}} 0(\Phi)$. 因此,如果在空间 Φ 内弱收敛蕴涵强收敛,即强弱收敛等价,则命题 3° 成立.

综结上述,我们得到下列

定理 1 设基本空间 Φ 满足下列条件

(a) $L \in \ddot{\Phi}$ 蕴涵分布函数 $(\delta_{(x)},L) \in \Phi$;

(b) δ 函数及其微商的线性闭包 Δ 为 $\dot{\Phi}$ 的稠密子空间;

(c) 在 Φ 内强弱收敛等价,

于是 $\Phi \cong \ddot{\Phi}$.

我们首先考察条件(a)在具体的基本空间的情况.

定理 2 设 Φ 为 K,E,S①,则 $L \in \ddot{\Phi}$ 蕴涵 $(\delta_{(x)},L') \in \Phi$.

证 当 $\Phi =$ E 时已经证明. 设 $\Phi =$ K,则只须证明存在 $C > 0$,使得当 $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} > C$ 时,$(\delta_{(x)},L) \equiv 0$. 如果不然则必有点列 $a_j \in R^n$,$|a_j| \to \infty$ 使得 $(\delta_{(a_j)},L') = b_j \neq 0$,亦即 $\left(\frac{1}{b_j}\delta_{(a_j)},L\right) \equiv 1 (j = 1,2,\cdots)$. 但因 $|a_j| \to \infty$ 蕴涵 $\frac{1}{b_j}\delta_{(a_j)} \to 0(\dot{\mathrm{K}})$,故 $\left(\frac{1}{b_j}\delta_{(a_j)},L\right) \to 0$,得一矛盾.

设 $\Phi =$ S,则只须证明,对任意多项式 $P(x)$ 及 $q = \{q_1,\cdots,q_n\}$ 而言,函数 $P(x)D^q(\delta_{(x)},L)$ 有界. 如果不成立,则存在点列 $a_j \in R^n$,$|a_j| \to \infty$ 使得

$$|P(a_j)D^q(\delta_{(a_j)},L)| = |(P(a_j)D^q\delta_{(a_j)},L)| \to \infty.$$

另一方面,设 $\varphi \in$ S,则由 $|a_j| \to \infty$ 及 S 的定义知

$$|(P(a_j)D^q\delta_{(a_j)},\varphi)| = |P(a_j)D^q\varphi(a_j)| \to 0,$$

① 关于基本空间 K,E,S 的定义见[1].

得一矛盾

§3 广义函数的 δ 函数逼近

定在 R^n 上的连续函数 $F(x)$ 可以界定函数型的广义函数 $F\in\dot{\Phi}$ 如下

$$(F,\varphi)=\int F(x)\varphi(x)dx\quad(\varphi\in\Phi),\tag{7}$$

此处在不同的基本空间 Φ 自然须对函数 $F(x)$ 在无穷远处的增长率加以不同的限制以保证积分(7)对一切 $\varphi\in\Phi$ 收敛，并且 $\varphi_j\to0(\Phi)$ 蕴涵 $(F,\varphi_j)\to0$. 例如，在空间 $\mathbf{E}$ 的情形，我们要求函数 $F(x)$ 具有紧密支集，即存在 $C>0$ 使得

$$F(x)\equiv0\quad(|x|\geqslant C),\tag{8}$$

在空间 $\mathbf{S}$ 的情形则要求 $F(x)$ 为缓增的，即存在 $q>0,B>0$ 使得

$$|F(x)|\leqslant B(1+|x|^2)^q\quad(x\in R^n),\tag{9}$$

在空间 $\mathbf{K}$ 的情形，则对函数 $F(x)$ 可不加任何限制．

我们知道 δ 函数及其微商恒可用连续函数来逼近，即表为连续函数 $F_j(x)$ 的广义极限．现在则要讨论反方向的逼近问题，即用 δ 函数的线性组合来逼近连续函数的问题．

命 $E_j(j=1,2,\cdots)$ 表示空间 R^n 内所有同时满足下列二条件的点 $a=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 组成的集合：

(i) $$|a|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}<j,$$

(ii) $$a_k=\frac{h}{2^j},h\text{ 为整数},(k=1,2,\cdots,n).$$

E_j 就是半径为 j 的球体内部间距为 $\frac{1}{2^j}$ 的格子点集合．今对 R^n 上的任意函数型广义函数 $F(x)$ 界定 $F_j\in\dot{\Phi}$ 如下：

$$F_j=\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j}F(a)\delta_{(a)}\quad(j=1,2,\cdots),\tag{10}$$

注意 F_j 为 δ 函数的有限线性组合．我们有

定理 3 设 $\Phi=\mathbf{K},\mathbf{E},\mathbf{S}$. $F(x)$ 为 R^n 上的连续函数，并且在 $\Phi=\mathbf{E}$ 的情形满足条件(8)，在 $\Phi=\mathbf{S}$ 的情形则满足条件(9). 于是 δ 函数的有限线性组合

$$F_j=\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j}F(a)\delta_{(a)}\to F\quad(\dot{\Phi})\quad(j\to\infty),\tag{11}$$

证 在 $\Phi=\mathbf{K}$ 或 $\mathbf{E}$ 的情形，对每一个 $\varphi\in\Phi$ 恒有 $C>0$ 使得 $F(x)\varphi(x)\equiv0(|x|\geqslant C)$. 因此

$$(F,\varphi)=\int_{|x|<C}F(x)\varphi(x)dx.$$

另一方面

$$\begin{aligned}(F_j,\varphi)&=\left(\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j}F(a)\delta_{(a)},\varphi\right)\\&=\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j}F(a)\varphi(a)=\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j,|a|<C}F(a)\varphi(a).\end{aligned}$$

因此根据 Riemann 可积性，知

$$(F_j,\varphi)\to\int_{|x|<C}F(x)\varphi(x)dx=(F,\varphi)\quad(j\to\infty,\varphi\in\Phi).$$

在空间 S 的情形，则由(9) 及 $\varphi\in$ S 知对任意 $r>0$ 恒存在 B_r 使得

$$|F(x)\varphi(x)|\leqslant B_r(1+|x|^2)^{-r}.\tag{12}$$

由此不难得知，对任意 $\varepsilon>0$ 必存在 $C>0$ 及整数 $j_0>0$，使得

$$\left|\int_{|x|\geqslant C}F(x)\varphi(x)dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j,|a|\geqslant C}F(a)\varphi(a)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\quad(j>j_0),$$

$$\left|\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j,|a|<C}F(a)\varphi(a)-\int_{|x|<C}F(x)\varphi(x)dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\quad(j>j_0).$$

我们有

$$(F_j,\varphi)=\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j,|a|<C}F(a)\varphi(a)+\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j,|a|\geqslant C}F(a)\varphi(a),$$

$$(F,\varphi)=\int_{|x|<C}F(x)\varphi(x)dx+\int_{|x|\geqslant C}F(x)\varphi(x)dx.$$

因此

$$|(F_j,\varphi)-(F,\varphi)|\leqslant\left|\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j,|a|<C}-\int_{|x|<C}\right|+\left|\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j,|a|\geqslant C}\right|+\left|\int_{|x|\geqslant C}\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\quad(j>j_0).$$

所以 $(F_j,\varphi)\to(F,\varphi)$.

注意：这里的连续函数的 δ 函数逼近法实质就是近似计算中的机械求积.

定理 4 在空间 K,E,S 内，Δ 为稠密子空间，即每一个广义函数可以表为 δ 函数及其微商的有限线性组合的极限.

证 当基本空间 $\Phi=$ K 或 E 时，任意广义函数下可以表为①

$$T=\sum_{i=1}^{\infty}D^{p_i}f_i,\tag{13}$$

此处 $f_i(i=1,2,\cdots)$ 为 R^n 上的连续函数，具有紧密支集 K_i，并当 $i\to\infty$ 时，集 K_i 与原点的距离 $\rho(0,K_i)\to\infty$. 作广义函数序列

$$T_j=\sum_{i=1}^{\infty}D^{p_i}T_{ij},\tag{14}$$

此处

$$T_{ij}=\frac{1}{2^{nj}}\sum_{a\in E_j}f_i(a)\delta_{(a)}.\tag{15}$$

因每一个 $E_j(j=1,2,\cdots)$ 只与有限多个 K_i 相交，故(14)右端实际上为有限和，即 $T_j\in\Delta$. 今设 $\varphi\in$ K. 因 φ 具有紧密支集，故存在正整数 i_0 使得

$$(T,\varphi)=\sum_{i=1}^{\infty}(D^{p_i}f_i,\varphi)=\sum_{i=1}^{i_0}(D^{p_i}f_i,\varphi),$$

① 见[1]，§6.2 定理 1 及 §2.1 定理 2 或[2].

$$(T_j,\varphi)=\sum_{i=1}^{\infty}(D^{p_i}T_{ij},\varphi)=\sum_{i=1}^{i_0}(D^{p_i}T_{ij},\varphi).$$

根据定理 3 知，当 $j\to\infty$ 时，$(T_{ij},\varphi)\to(f_i,\varphi)$，因此 $(D^{p_i}T_{ij},\varphi)=(D^{p_i}f_i,\varphi)$. 故 $T_j\to T(\dot{\mathrm{K}})$. 在 $\Phi=\mathrm{E}$ 时，表达式(13) 可简化为有限和，余同前．

当 $\Phi=\mathrm{S}$ 时，任意广义函数可以表为缓增连续函数的微商

$$T=D^pF,$$

此处 $F(x)$ 满足条件(9). 于是按定理 3 知 $F_j\to F$，即 $D^pF_j\to T(\mathrm{S})$.

§4　基本空间内强弱收敛的等价性

我们先证具有一般性的定理 5，然后证空间 K，E，S 内强弱收敛等价(定理 6).

定理 5　设 $\varphi_j\xrightarrow{\text{弱}}0(\Phi)$，则其各级微商 $D^p\varphi_j(x)$ 在 R^n 内任意紧密集 A 上一致 $\to 0$.

证　因 $\varphi_j\xrightarrow{\text{弱}}0(\Phi)$ 蕴涵 $D^p\varphi_j\xrightarrow{\text{弱}}0(\Phi)$. 故只须证明 $\varphi_j\xrightarrow{\text{弱}}0(\Phi)$ 蕴涵 $\varphi_j(x)$ 在 R^n 的任意紧密集 A 上一致 $\to 0$. 设对于一切 $T\in\dot{\Phi}$　有 $(T,\varphi_j)\to 0$. 我们有

1°　函数 $\varphi_j(x)$ 在 R^n 内到处 $\to 0$. 这是因为 $\varphi_j(x)=(\delta_{(x)},\varphi_j)\to 0$.

2°　函数 $\varphi_j(x)$ 在 A 上一致有界．为此命 C_A 为 A 上所有连续函数组成的线性赋范空间，其范数如常定为

$$\|f\|_A=\max_{x\in A}|f(x)|,\quad f\in\mathrm{C}_A;\tag{16}$$

$\dot{\mathrm{C}}_A$ 为赋范空间 C_A 的共轭空间，即由 C_A 的复数值的连续线性泛函组成．根据基本空间定义的条件 3° 知 $\psi_j\to 0(\Phi)$ 蕴涵 $\|\psi_j\|_A\to 0$①. 因此 C_A 的连续线性泛函均可视为 Φ 的连续线性泛函，即 $\dot{\mathrm{C}}_A\subset\dot{\Phi}$. 今对一切 $T\in\dot{\Phi}$ 有 $(T,\varphi_j)\to 0$，故当视 φ_j 为 C_A 的序列时，因 $\dot{\mathrm{C}}_A\subset\dot{\Phi}$，故对一切 $T\in\dot{\mathrm{C}}_A$ 也有 $(T,\varphi_j)\to 0$，即 $\varphi_j\xrightarrow{\text{弱}}0(\mathrm{C}_A)$. 于是根据 Banach 定理②，知 $\|\varphi_j\|_A$ 有界，亦即 $\varphi_j(x)$ 在 A 上一致有界．

3°　$\varphi_j(x)$ 在 A 上一致 $\to 0$. 由 2° 知 $\varphi_j(x)$ 的各级微商均在 A 上一致有界．于是不难证明 $\varphi_j(x)$ 在 A 上为同等连续，即对任意 $\varepsilon>0$ 必有与 j 无关的 $\sigma>0$，

$$|\varphi_j(x_1)-\varphi_j(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\quad(x_1,x_2\in A,|x_1-x_2|\leqslant\sigma).\tag{17}$$

又因 A 紧密，故存在有限多个点 $a_1,\cdots,a_m\in A$，使得 A 的任意点 x 必与某点 a_i 的距离 $|x-a_i|\leqslant\sigma$. 另一方面，根据 1° 有 j_0 使得

$$|\varphi_j(a_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\quad(j>j_0,i=1,2,\cdots,m).\tag{18}$$

故由(17)(18) 知

$$|\varphi_j(x)|\leqslant|\varphi_j(x)-\varphi_j(a_i)|+|\varphi_j(a_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad(j>j_0,x\in A).$$

定理 6　空间 K，E，S 内强弱收敛等价．

---

① 在 $\|\psi_j\|_A$ 的写法中，我们仅考虑 ψ_j 在 A 上的值内视所得的函数为 C_A 中元素，余类推．

② 见[6]，第三章．

证 在空间E的情形定理已包括在定理5之内．在空间K的情形，根据定理5，显然只待证明 $\varphi_j \xrightarrow{\text{弱}} 0(\mathbf{K})$ 蕴涵 $\varphi_j(x)$ 的支集含在一个公共的紧密集之内．假设不成立，于是序列 $\{\varphi_j\}$ 含有一个子序列 $\{\varphi_{k_j}\}(j=1,2,\cdots)$ 并存在点列 $\{x_j\}(j=1,2,\cdots)$ 使得

$$\varphi_{k_j}(x_j) \neq 0, \tag{19}$$

$$\varphi_{k_j}(x_i) = 0 \quad (j < i), \tag{20}$$

$$|x_j| > j. \tag{21}$$

我们可用归纳法作之：设 $\{\varphi_{k_1},\cdots,\varphi_{k_h}\}$ 及 $\{x_1,\cdots,x_h\}$ 已经作好．据假设 $\{\varphi_j\}$ 的支集不在一个公共的紧密集之内，但 $\{\varphi_{k_1},\cdots,\varphi_{k_h}\}$ 的支集恒在一个公共的紧密集之内；故恒有点 $x_{h+1} \in R^n$ 及序列 $\{j\}$ 自 k_h 以后的一个指标 k_{h+1}，使得 $\varphi_{k_{h+1}}(x_{h+1}) \neq 0$；$\varphi_{k_i}(x_{h+1}) = 0(i < k+1)$；$|x_{k_{h+1}}| > h+1$.

根据(19)显然可作复数列 $\{c_j\}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{j} c_i \varphi_{k_j}(x_i) = 1 \quad (j=1,2,\cdots). \tag{22}$$

今命

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta_{(x_j)}, \tag{23}$$

由(21)知 $T \in \dot{\mathbf{K}}$，由(20)，(22)知

$$(T,\varphi_{k_j}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\delta_{(x_i)},\varphi_{k_j}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_{k_j}(x_i) = \sum_{i=1}^{j} c_i\varphi_{k_j}(x_i) = 1,$$

此与 $(T,\varphi_j) \to 0$ 相矛盾．

在空间S的情形，根据定理5，显然只待证明 $\varphi_j \xrightarrow{\text{弱}} 0(\mathbf{S})$ 蕴涵对任意多项式 $P(x)$ 及 $q=\{q_1,\cdots,q_n\}$ 而言，$P(x)D^q\varphi_j(x)$ 在 R^n 上一致有界．但因 $\varphi_j \xrightarrow{\text{弱}} 0$ 蕴涵 $P(x)D^q\varphi_j(x) \xrightarrow{\text{弱}} 0$，故只待证明 $\varphi_j \xrightarrow{\text{弱}} 0(\mathbf{S})$ 蕴涵 $\varphi_j(x)$ 在 R^n 上一致有界．为此考虑由 R^n 上有界函数组成的赋范空间M，其范数为

$$\|f\| = \sup_{x\in R^n}|f(x)|, f \in \mathbf{M}.$$

因 $\psi_j \to 0(\mathbf{S})$ 蕴涵 $\|\psi_j\| \to 0$，故根据定理5证明内的推理，知 $\varphi_j \xrightarrow{\text{弱}} 0(\mathbf{S})$ 蕴涵 $\varphi_j \xrightarrow{\text{弱}} 0(\mathbf{M})$，因此 $\|\varphi_j\|$ 有界．

总结以上的定理1，2，3，4，5，6知基本空间K，E，S为自反的。

参考文献

[1] 冯康，广义函数论，数学进展，1：3(1955).

[2] Schwartz, Theorie des distributions, I, II, Paris, 1950—1.

[3] Гельфанд, Шилов Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, *Успехи Мат. Наук*, 8：6(1953), 1—54.

[4] Mackey, On infinite dimensional linear spaces, *Tran. Am. Math. Soc.*, 57(1945)156—207.

[5] Arens, Duality in linear spaces, *Duke Math. J.*, 14(1947), 787—794.

[6] Люстерник, Соболев, Элементы функционального анализа, (1951), Москва—Ленинград, 中译本，泛函数分析概要，1955，北京．