非协调元的分数阶 Sobolev 空间[①]

FRACTIONAl ORDER SOBOLEV SPACES FOR NONCONFORMING FINITE ELEMENTS

本文对非协调元空间，定义了分数阶 Sololev 范数并证明了分数阶迹嵌入定理. 假定平面多边形区域 Ω 的剖分是正则的且满足反假设，对应的有限元空间 S_h 具有下述性质：对于 $u \in S_h$，u 在区域 Ω 的剖分 π_h 的每个线元上至少有一个连续点. 设 $\Gamma \subset \partial\Omega$ 为 Ω 的边界的一直线段.

定义

$$\| u \|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} = \| u \|^2_{0,\Gamma} + \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{N} \int_{B_\mu} dP \int_{B_\nu} \left(\frac{u(P) - u(P')}{r(P,P')} \right)^2 dP' \tag{1}$$

其中 $\Gamma = \overline{QQ'} = \sum_{i=1}^{N} B_\mu$，$B_\mu$ 为边界上的线元，而

$$r(P,P') = ((x_P - x_{P'})^2 + (y_P - y_{P'})^2)^{1/2}, P = (x_P, y_P), P' = (x_{P'}, y_{P'}).$$

定理 设区域 Ω 具有性质：可作一个以 Γ 为斜边的直角三角形，使得它整个包含在 Ω 中(见图 1)，则下述不等式成立.

$$\sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{N} \int_{B_\mu} dP \int_{B_\nu} \left(\frac{u(P) - u(P')}{r(P,P')} \right)^2 dP' \leqslant K \sum_{C} |u|^2_{1,C} \quad \forall\, u \in S_h, \tag{2}$$

即

$$\| u \|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant K \sum_{C} \| u \|^2_{1,C} \qquad \forall\, u \in S_h, \tag{3}$$

其中 $K = \text{const.} > 0$ 与 u 及 h 无关.

为了证明定理，需要两个引理.

引理 1 (Hardy 不等式)(见[3,p270])

(i) 积分形式

$$\int_0^A \left(\frac{\int_0^x f(\xi) d\xi}{x} \right)^2 dx < 4 \int_0^A f^2(x) dx, \tag{4}$$

其中 $0 < A \leqslant \infty$；

(ii) 级数形式

---

① 本文根据冯康先生生前手稿中的思想，由王烈衡整理并完成.

$$\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}a_i}{k}\right)^2 < 4\sum_{k=1}^{M}a_k^2, \tag{5}$$

其中 M 为自然数或 ∞，只要上述二式右端有意义且不为零.

引理 2 （同阶嵌入定理）（见[1]，[4]）

设 C 是一平面三角形，边界为 ∂C，P 是定义在 C 上的一个多项式空间. 则

$$|u|_{k,\partial C} \leqslant kh^{-\frac{1}{2}}|u|_{k,C} \qquad \forall\, u \in P \tag{6}$$

其中 $h = \mathrm{diam}C, K = \mathrm{const}, > 0$ 与 h 无关.

定理的证明 对于任给定的 $P, P' \in \Gamma$，且 P' 在 P 的上方，即 $y_{P'} \geqslant y_P$ 时，作直角三角形，为简单计不妨设为直角等腰三角形，$PRP' \subset \Omega$，则存在两条"纵"，"横"带 $F_P, F_{P'}$，它们分别由单元组成，使得 $PR \subset F_P \quad \forall\, P \in B_P, P'R \subset F'_{P'} \quad \forall\, P' \in B_{P'}$，$B_P$ 及 $B_{P'}$ 分别为包含 P 及 P' 的线元，而 F_P 及 $F'_{P'}$ 的宽度为 $O(h)$，即

$$|F_P| = F_P \text{ 的面积}, |F'_{P'}| = F'_{P'} \text{ 的面积} \leqslant Kh \quad \forall\, P, P' \in \Gamma, \tag{7}$$

其中 k 是与 P, P' 的选取无关且与 h 无关的正常数. 而且考虑到剖分的拟一致性，当 h 足够小时，对任何单元 $C \in \pi_h$，共享它的带 F_P（或 $F'_{P'}$）的个数 $\leqslant q < \infty$，常数 q 与 h 无关.

现设 $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_nP_{n-1}}, P_0 = P, P_h = R; \overrightarrow{P'R} = \overrightarrow{P'_0P'_1} + \overrightarrow{P'_1P'_2} + \cdots + \overrightarrow{P'_{m-1}P'_m}, P'_0 = P', P'_m = R$，而 $P_1, P_2\cdots, P_{n-1}$ 及 $P'_1, P'_2\cdots, P'_{m-1}$ 分别在 F_P 及 $F'_{P'}$ 的单元的边界上（见图 1）.

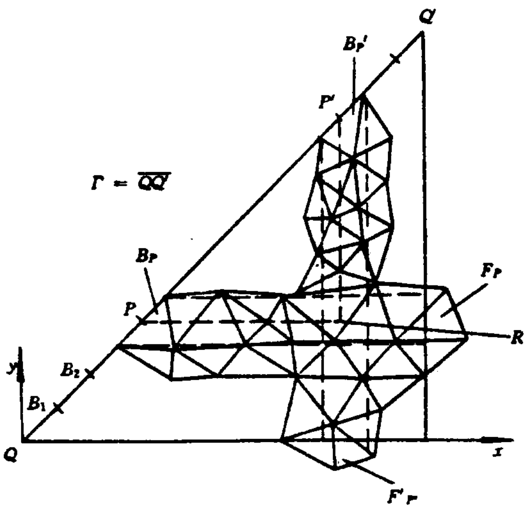

图 1

那末 $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP'}$，

$$u(P) - u(P') = \sum_{i=1}^{n}\int_{\overrightarrow{P_{i-1}P_i}} u_s ds + \sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}$$

$$
-\sum_{j=1}^{m}\int_{\overrightarrow{P'_{j-1}P_j}} u_s ds-\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P_j}
$$

$$
=\int_{\overrightarrow{PR}} u_s ds+\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}-\int_{\overrightarrow{P'R}} u_s d_s-\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P'_j},
$$

其中$[u]_{P_i}$为u在P_i处的跳跃值，其具体表达式见下面文中. 从而

$$
\frac{1}{4}\left(\frac{u(P)-u(P')}{r(P,P')}\right)^2\leqslant\left(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}} u_s ds}{r(P,P')}\right)^2+\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\right)^2+\left(\frac{\int_{\overrightarrow{P'R}} u_s d_s}{r(P,P')}\right)^2+\left(\frac{\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P_j}}{r(P,P')}\right)^2 \tag{8}
$$

将上式右端前二项，对P'在$\overline{PQ}\subset\Gamma$上积分. 首先考察第一项

$$
\int_{\overline{PQ}}\left(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}} u_s d_s}{r(P,P')}\right)^2 dP'\leqslant\int_{\overline{PQ}}\left(\frac{\int_{x_P}^{x_{P'}}|u_x(\xi,y_P)|d\xi}{\sqrt{2}\,|x_{P'}-x_P|}\right)^2 dP'
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{x_P}^{x_Q}\left(\frac{\int_{x_P}^{x_{P'}}|u_x(\xi,y_P)|d\xi}{|x_{P'}-x_P|}\right)^2 dx_{P'}
$$

$$
<2\sqrt{2}\int_{x_P}^{x_Q}u_x^2(\xi,y_P)d\xi\leqslant K_1h^{-1}\iint_{F_P}u_x^2dxdy, \tag{9}
$$

其中

$$
\iint_{F_P}u_x^2dxdy=\sum_{C\in F_P}\iint_C u_x^2dxdy, \tag{10}
$$

(9)式倒数第二个不等式是由于积分形式的Hardy不等式，而最后的不等式是利用了同阶嵌入不等式，以后凡是出现K,K',K_1,K_2等等均为绝对常数与u及h无关，且不同之处可能取不同的值. 其次估计(8)式右端第二项对P'在$\overline{PQ}$上的积分

$$
\int_{\overline{PQ}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\right)^2 dP'\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{x_P}^{x_Q}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}|[u]_{P_i}|}{|x_{P'}-x_P|}\right)^2 dx_{P'}. \tag{11}
$$

由于

$$
|x_{P'}-x_P|^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}|x_{P_i}-x_{P_{i-1}}|^2\geqslant K'nh^2,
$$

$$
\int_{x_P}^{x_Q}(\cdots)dx_{P'}=\sum_{n=1}^{N'}\int_{x_{P_{n-1}}}^{x_{P_n}}(\cdots)dx_{P'},x_{P_0}=x_P,\quad x_{P_{N'}}=x_Q,
$$

从而由级数形式的Hardy不等式，

$$
\int_{x_P}^{x_Q}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}|[u]_{P_i}|}{|x_{P'}-x_P|}\right)^2 dx_{P'}=\sum_{n=1}^{N'}\int_{x_{P_{n-1}}}^{x_{P_n}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}|[u]_{P_i}|}{|x_{P'}-x_P|}\right)^2 dx_{P'}
$$

$$\leqslant K_1 h^{-1} \sum_{n=1}^{N'} (n \cdot |x_{P_n} - x_{P_{n-1}}|) \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} |[u]_{P_i}|}{n-1} \right)^2$$

$$< 4K_1 h^{-1} \sum_{n=1}^{N'} [u]_{P_n}^2, \tag{12}$$

这里还应注意到 $n|x_{P_n} - x_{P_{n-1}}| \leqslant K' \quad \forall\, 1 \leqslant n \leqslant N'$. 现在给出 $[u]_{P_n}$ 的具体表达式并估计 $[u]_{P_n}^2, n = 1, \cdots, N'$. 设 P_n 在单元 C_+, C_- 的公共边 B 上，按 S_h 的性质存在一点 $M_n \in B$，使得 u 在 M_n 处连续(见图 2)，从而

$$\begin{aligned} [u]_{P_n} &= u(P_n + 0) - u(P_n - 0) \\ &= (u(P_n + 0) - u(M_n + 0)) \\ &\quad - (u(P_n - 0) - u(M_n - 0)) \\ &= |\overline{P_n M_n}|(u_s(\xi^+) - u_s(\xi^-)) \end{aligned}$$

其中 $u(P_n + 0) = u|_{C^+}(P_n), u(P_n - 0) = u|_{C^-}(P_n)$，而 $u_s(\xi^+) = u_s|_{C^+}(\xi), u_s(\xi^-) = u_s|_{C^-}(\xi)$，从而由反不等式([2])

$$\begin{aligned} |[u]_{P_n}|^2 &\leqslant K' h^2 (\max_{C^+} |\nabla u|^2 + \max_{C^-} |\nabla u|^2) \\ &\leqslant K'(|u|_{1,C^+}^2 + |u|_{1,C^-}^2). \end{aligned} \tag{13}$$

当 P_n 为单元 $C_{1,P_n}, C_{2,P_n}, \cdots, C_{l,P_n}$ 的公共顶点时(见图 3)，则可同样地证明

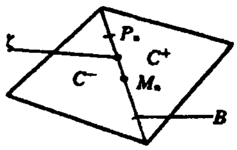

图 2

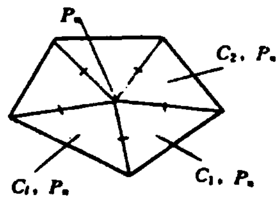

图 3

$$|[u]_{P_n}|^2 \leqslant K'(|u|_{1,C_{1,P_n}}^2 + \cdots + |u|_{1,C_{l,P_n}}^2). \tag{13'}$$

考虑到剖分的拟一致性质，上面的 $l \leqslant r < \infty$，而 r 与顶点无关，且与 h 无关，因此由(12)，(13)(或(13'))可见

$$\int_{x_P}^{x_{Q'}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} |[u]_{P_i}|}{|x_{P'} - x_P|} \right)^2 dx_{P'} \leqslant K' h^{-1} \sum_{C \in F_P} |u|_{1,C}^2,$$

从而

$$\int_{\overline{PQ}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} [u]_{P_i}}{r(P, P')} \right)^2 dP' \leqslant K_1 h^{-1} \sum_{C \in F_P} |u|_{1,C}^2. \tag{14}$$

综合(9)，(10)及(14)，可见

$$\int_{\overline{PQ}} \left(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}} u_s ds}{r(P, P')} \right)^2 dP' + \int_{\overline{PQ}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} [u]_{P_i}}{r(P, P')} \right)^2 dP'$$

$$\leqslant K_1 h^{-1}\Big(\iint_{F_P} u_x^2\,dxdy + \sum_{C\in F_P} |u|_{1,C}^2\Big)$$

$$\leqslant K_1 h^{-1}|u|_{1,F_P}^2 = K_1 h^{-1}|u|^2_{1,F_{\mu(P)}}, \quad \forall P\in B_\mu \tag{15}$$

当 P' 在 P 的下方时，同样可有(图 4)，只是注意到此时 F_P 为“纵”条，

$$\int_{\overline{PQ'}}\left(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}} u_s\,ds}{r(P,P')}\right)^2 dP' + \int_{\overline{PQ}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\right)^2 dP'$$

$$\leqslant K_1 h^{-1}\Big(\iint_{F_P} u_y^2\,dxdy + \sum_{C\in F_P} |u|_{1,C}^2\Big)$$

$$\leqslant K_1 h^{-1}|u|^2_{1,F_{\mu(P)}} \qquad \forall P\in B_\mu. \tag{16}$$

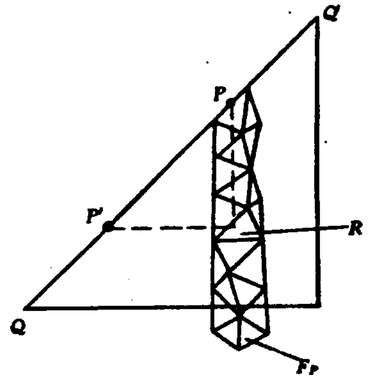

图 4

由(15)，(16) 可见

$$\int_\Gamma dP\int_\Gamma\left\{\left(\frac{\int_{\overrightarrow{PR}} u_s\,ds}{r(P,P')}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}}{r(P,P')}\right)^2\right\}dP'$$

$$= \int_{\overline{QQ'}} dP\Big(\int_{\overline{PQ'}} + \int_{\overline{PQ}}\Big)\{\cdots\}dP'$$

$$= \sum_\mu \int_{B_\mu}\Big(\int_{\overline{PQ'}} + \int_{\overline{PQ}}\Big)\{\cdots\}dP'$$

$$\leqslant K_1 h^{-1}\sum_\mu h|u|^2_{1,F_{\mu(P)}} \leqslant K_1\sum_C |u|^2_{1,C}. \tag{17}$$

至于(8) 式右端最后两项的积分，注意到交换积分变量，

$$\int_\Gamma dP\int_\Gamma\left\{\left(\frac{\int_{\overrightarrow{P'R}} u_s\,ds}{r(P,P')}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P'_j}}{r(P,P')}\right)^2\right\}dP' = \int_\Gamma dP'\int_\Gamma\{\cdots\}dP$$

然后同上面一样可得

$$\iint_{\Gamma\Gamma}\left\{\left(\frac{\int_{\overrightarrow{P'R}} u_s\,ds}{r(P,P')}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{j=1}^{m-1}[u]_{P'_j}}{r(P,P')}\right)^2\right\}dPdP' \leqslant K_1\sum_C |u|^2_{1,C}. \tag{18}$$

由(17)，(18) 及(8) 即得

$$\frac{1}{4}\iint_{\Gamma\Gamma}\Big(\frac{u(P)-u(P')}{r(P,P')}\Big)^2 dP'dP \leqslant K_1\sum_C |u|^2_{1,C},$$

这就证明了(2). 再利用[1] 中的痕迹嵌入定理，即得证(3) 式.

附注1　定理的条件可放宽为，可作一个以 Γ 为一边的三角形整个地包含在 Ω 中(图5). 此时以该三角形的另外两边作为仿射坐标 (x,y)，来替代原来的直角坐标 (x,y)，其余过程完全相同.

附注2　对于 Γ 由折线组成(而不是一直线段)时，只要对每相邻两段直线具有附注1的类似性质，即可作一个四边形整个地包含在 Ω 中，而该两段直线为此四边形的两边时(图6)，定理结论依然正确. 为此只要注意到当 P,P' 不在相邻两段直线段上时，则 $r(P,P')\geqslant q'>0$，从而

$$\iint\limits_{\Gamma_1\Gamma_3}\left(\frac{u(P)-u(P')}{r(P,P')}\right)^2 dP'dP$$
$$\leqslant\frac{2}{(q')^2}\left(|\Gamma_3|\int\limits_{\Gamma_1}u^2(P)dP+|\Gamma_1|\int\limits_{\Gamma_3}u^2(P')dP'\right)$$
$$\leqslant K\sum_C\|u\|^2_{1,C},$$

其中最后不等式利用了[1]中的痕迹嵌入定理.

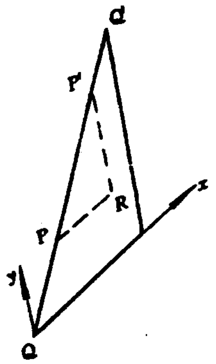

图　5

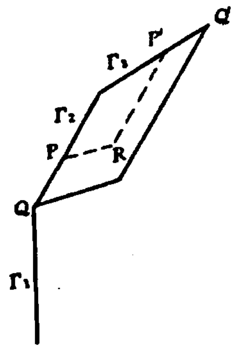

图　6

参考文献

[1] 冯康，非协调有限元空间的 Poincare', Friedrichs 不等式，本文集，pp. 340-353

[2] P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] 哈代等，不等式，越民义译，科学出版社，1965 年.

[4] F. Stummel, The gemeralized patch test, SIAM J. Numer, Anal. 16, 449-471, 1979,