非协调元空间的一个 Sobolev 嵌入定理①

A SOBOLEV IMBEDDING THEOREM IN NONCONFORMING FINITE ELEMENT SPACES

在这篇短文中，我们给出具有一定性质的非协调元空间的一个 Sobolev 嵌入定理及其证明. 首先假设平面区域 Ω 具有性质：对任一点 $Q \in \Omega$，存在一条过 Q 的直线段 $\Gamma = \Gamma_Q \subset \Omega$，使得

$$|\Gamma_Q| = \Gamma_Q \text{ 的长设} > q > 0 \quad \forall\, Q \in \Omega; \tag{1}$$

且存在一个以 Γ_Q 为一边的平行四边形 $D = D_Q \subset \Omega$，使得

$$|D_Q| = D_Q \text{ 的面积} > q' > 0 \quad \forall\, Q \in \Omega, \tag{2}$$

其中 q, q' 为与 Q 无关的正常数.

设 π_h 是区域 Ω 的一个正则剖分且满足反假设，S_h 是对应的有限元空间，具有下述性质：在剖分的顶点处，S_h 中的函数 u 连续；而且在剖分单元的公共边上，至少有一点，使得 S_h 中函数 u 的法向导数 u_n 连续. 这样，我们有

定理 在区域 Ω 及有限元空间 S_h 的上述假设下，成立下述形式的 Sobolev 嵌入定理，

$$|u(Q)| \leqslant k \sum_C \| u \|_{2,C}, \forall\, Q \in \Omega, \tag{3}$$

其中 $K = \text{const.} > 0$ 与 $Q \in \Omega, u \in S_h$ 及 h 无关.

证明：对任意给定的 $Q \in \Omega$，按假定存在直线段 $\Gamma_Q = \Gamma \subset \Omega$. 在 Γ 上任取一点 P，则直线段 $\overline{PQ} \subset \Gamma$. 令

$$\overline{PQ} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}, P_0 = P, P_n = Q,$$

使得 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 含在单元内部，而 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 在单元边上或在顶点上（见图 1). 那末

$$\begin{aligned} u(Q) &= u(P) + \int_{\overrightarrow{P_0P_1}} u_s ds + [u]_{P_1} + \int_{\overrightarrow{P_1P_2}} u_s ds + [u]_{P_2} + \cdots + [u]_{P_{n-1}} + \int_{\overrightarrow{P_{n-1}P_n}} u_s ds \\ &= u(P) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\overrightarrow{P_{i-1}P_i}} u_s ds + \sum_{i=1}^{n-1} [u]_{P_i}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $[u]_{P_i}$ 为 u 在点 P_i 处的“跳跃值”，其具体表达式将在下面给出.

我们分两种情形来估计 $[u]_{P_i}, i = 1, 2, \cdots, n-1$.

(i) 当 P_i 在两个单元 C^+, C^- 的公共边 B 上时（例如图 1 中的 P_2 点）（见图 2)，则

① 本文根据冯康先生生前手稿中的思想，由王烈衡整理并完成.

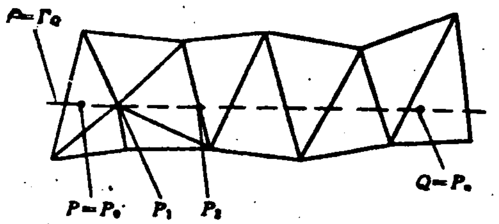

图 1

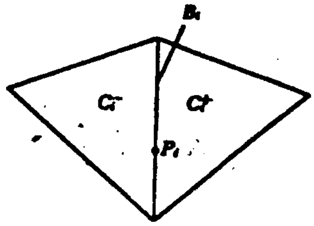

图 2

$$[u]_{P_i} = u(P_i+0) - u(P_i-0),$$

其中

$$u(P_i+0) = u|_{C_i^+}(P_i),$$
$$u(P_i-0) = u|_{C_i^-}(P_i).$$

令 Λ_0 是以剖分 π_h 的顶点为节点的分片线性插值算子，则 $\Lambda_0 u(P_i+0) = \Lambda_0 u(P_i-0)$，从而

$$[u]_{P_i} = (u-\Lambda_0 u)(P_i+0) - (u-\Lambda_0 u)(P_i-0).$$

因此由反不等式及线性插值误差估计([1],[2])，有

$$\begin{aligned}[u]_{P_i}^2 &\leqslant 2(u-\Lambda_0 u)^2(P_i+0) + 2(u-\Lambda_0 u)^2(P_i-0)\\ &\leqslant K_1' h^{-2}(|u-\Lambda_0 u|_{0,C^+}^2 + |u-\Lambda_0 u|_{0,C^-}^2)\\ &\leqslant K_1 h^2(|u|_{2,C_i^+}^2 + |u|_{2,C_i^-}^2).\end{aligned} \tag{5}$$

(ii) 当 P_i 在顶点时(例如图 1 中的 P_1 点)(见图 3)，则跳跃 $[u]_{P_i}$ 应通过有限个单元 C_i^1，$C_i^2,\cdots,C_i^p$ 的边 $B_i^1\subset\partial C_i^1,\cdots,B_i^p\subset\partial C_i^p$ 上的跳跃来表示

$$[u]_{P_i} = \sum_{k=1}^{p}[u]_{P_i\in B_i^k},$$

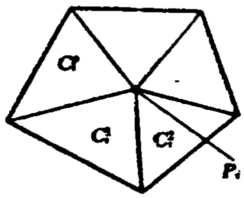

图 3

同样地，我们有

$$[u]_{P_i}^2 \leqslant K_2 h^2\sum_{k=1}^{p}|u|_{2,C_i^k}^2. \tag{6}$$

于是，考虑到剖分的拟一致性，以同一顶点为共同顶点的单元个数 $\leqslant\gamma<\infty$，而 γ 与 h 无关，

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}u^2(Q) &\leqslant u^2(P) + \Big\{\sum_{i=1}^{n}\int_{\overrightarrow{P_{i-1}P_i}} u_s ds\Big\}^2 + \Big\{\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}\Big\}^2\\ &\leqslant u^2(P) + L\sum_{i=1}^{h}\int_{\overline{P_{i-1}P_i}} u_s^2 ds + n\sum_{i=1}^{n-1}[u]_{P_i}^2\\ &\leqslant u^2(P) + L\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{P_{i-1}P_i}} u_s^2 ds + K'h\sum_{C}|u|_{2,C}^2,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $L=\operatorname{diam}\Omega$，而 $n=0(h^{-1})$. 现将上式对 P 在 $\Gamma=\Gamma_Q$ 上积分，可得

$$\frac{1}{3}|\Gamma|u^2(Q) \leqslant \int_\Gamma u^2 ds + L^2\int_\Gamma u_s^2 ds + LK'h\sum_C|u|_{2,C}^2 \tag{8}$$

其中

$$\int_{\Gamma} u_i^2 ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\overline{P_{i-1}P_i}} u_i^2 ds, \quad (N \geq n).$$

由痕迹嵌入定理([1])

$$\int_{\Gamma} u^2 ds \leqslant K_1 (\| u \|_{0,D}^2 + |u|_{1,D,h}^2),$$

$$\int_{\Gamma} u_i^2 ds \leqslant K_2 (|u|_{1,D,h}^2 + |u|_{2,D,h}^2),$$

其中

$$|u|_{k,D,h}^2 = \sum_{C, C \cap D \neq \phi} |u|_{k,c}^2, k = 1, 2,$$

同时由[1]中可见 K_1, K_2 与 $D = D_Q$ 的面积成反比，因而由假设 area$D_a > q' > 0 \quad \forall Q \in \Omega$，可见 K_1, K_2 可取为与 $Q \in \Omega$ 无关的常数. 综合上述及(8)可见

$$\begin{aligned} u^2(Q) &\leqslant \frac{3}{q} \{ K_1 \| u \|_{0,D}^2 + (K_1 + L^2 K_2) |u|_{1,D,h}^2 + L^2 K_2 |u|_{2,D,h}^2 + LK' h \sum_C |u|_{2,C}^2 \} \\ &\leqslant K \sum_C \| u \|_{2,C}^2. \end{aligned}$$

从而定理得证.

参考文献

[1] 冯康. 非协调有限元空间的 Poincaré, Friedrichs 不等式. 本文集, pp340—353.

[2] P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.