非协调有限元空间的 Poincaré, Friedrichs 不等式[①]

POINCARE AND FRIEDRICHS INEQUALITIES IN NONCONFORMING FINITE ELEMENT SPACES

§1 多项式的同阶嵌入

设 C 是一平面三角形，其边记为 ∂C. P 是定义在 C 上的多项式空间

$$P = \{u \mid u = \sum_{p,q} a_{pq} x^p y^q\}.$$

则

$$|u|_{k,\partial C} \leqslant k h^{-\frac{1}{2}} |u|_{k,C} \quad \forall\, u \in P, \tag{1.1}$$

其中 $h = \mathrm{diam} C$. $K = \mathrm{const} > 0$ 与 h 无关.

证明 首先在标准三角形 $\hat{c}$ 上，

$$|\hat{u}|^2_{0,\partial\hat{C}} = \int_{\partial\hat{C}} (\sum_{p,q} a_{pq} \hat{x}^p \hat{y}^q)^2 ds$$

$$= A_0(\cdots a_{pq} \cdots) \leqslant \lambda_{\max} \sum_{\substack{p,q\\ p+q \geqslant 0}} a^2_{p,q},$$

其中 $A_0(\cdots a_{pq} \cdots)$ 是关于 $a_{pq}(p+q \geqslant 0)$ 的一个非负定的二次型，而 $\lambda_{\max}$ 是其最大特征值. 同样地

$$|\hat{u}|^2_{0,\hat{C}} = \iint_{\hat{C}} (\sum_{p,q} a_{pq} \hat{x}^p \hat{y}^q)^2 d\hat{x} d\hat{y}$$

$$= A_1(\cdots a_{pq} \cdots) \geqslant \mu_{\min} \sum_{\substack{p,q\\ p+q \geqslant 0}} a^2_{pq},$$

其中 $A_1(\cdots a_{pq} \cdots)$ 是关于 $a_{pq}(p+q \geqslant 0)$ 的一个正定二次型，而 $\mu_{\min} > 0$ 是其最小特征值. 从而

$$|\hat{u}|^2_{0,\partial\hat{C}} \leqslant \lambda_{\max} \sum_{p,q} a^2_{pq} \leqslant \frac{\lambda_{\max}}{\mu_{\min}} |\hat{u}|^2_{0,\hat{C}}.$$

因此

$$|\hat{u}|_{0,\partial\hat{C}} \leqslant \hat{K} |\hat{u}|_{0,\hat{c}}\, \hat{k} = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\mu_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{const.} > 0.$$

---

① 本文根据冯康先生生前手稿，由王烈衡整理.

类似地有

$$|\hat{u}|_{k,\mathscr{C}} \leqslant \hat{K}|\hat{u}|_{k,\hat{C}}.$$

利用标准三角形与一般三角形单元上半范数的关系(n 维情形)

$$|u|_{k,C} \leqslant K_1 h^{\frac{n}{2}-k}|\hat{u}|_{k,\hat{C}},\ |\hat{u}|_{k,\hat{C}} \leqslant K_2 h^{k-\frac{n}{2}}|u|_{k,C},$$

则当 $n=2$ 时,我们就有

$$|u|_{k,\mathscr{C}} \leqslant K_1 h^{\frac{1}{2}-k}|\hat{u}|_{k,\hat{\mathscr{C}}} \leqslant K_1\hat{K}h^{\frac{1}{2}-k}|\hat{u}|_{k,\hat{C}}$$
$$\leqslant K_1K_2\hat{K}h^{\frac{1}{2}-k}h^{k-1}|\hat{u}|_{k,C} = Kh^{-\frac{1}{2}}|u|_{k,C}.$$

即得证明.

附注:对 n 维空间情形,同阶嵌入不等式(1.1)仍成立,而且常数 K 与维数 n 无关.

§2 对于矩形区域,矩形部分的 Poincaré,Friedrichs 不等式

设 $\Omega=[0<x<a,0<y<b]$,$x_i=ih$,$i=0,1,\cdots,n$,$y_j=jh$,$j=0,1,\cdots,m$,(x_i,y_j) 是 Ω 的剖分顶点. 设 S_h 是对应的有限元空间,并假定 (x_i,y_j) 为 0 阶连续点(即 $v\in S_h$,v 在顶点 (x_i,y_i) 处连续).

2.1 Poincare' 不等式

$$\iint_\Omega v^2dxdy \leqslant K_1\sum_C|v|_{1,C}^2 + K_2\left(\iint_\Omega vdxdy\right)^2 \quad \forall\, v\in S_h. \tag{2.1}$$

其中 $K_1,K_2=\text{const.}>0$ 与 h 无关,C 为区域 Ω 的剖分单元:$C=[ih<x<(i+1)h,jh<y<(j+1)h]$,$0\leqslant i\leqslant n-1$,$0\leqslant j\leqslant m-1$.

证明 设 (x,y) 和 (x',y') 为 Ω 中的任意两点,令 $\alpha(x)$ 为唯一数 x_i,使得

$x_i\leqslant x<x_{i+1}$,即 $i=[\frac{x}{h}]$,$\beta(y)$ 为唯一数 y,使得

$y_i\leqslant y<y_{j+1}$,即 $j=[\frac{y}{h}]$,则对于 $(x,y),(x',y')\in\Omega$,有(见图 2.1)

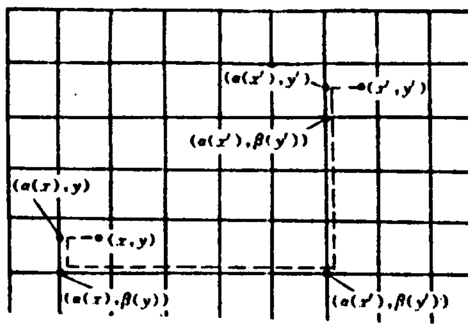

图 2.1

$$v(x',y')-v(x,y) = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6,$$

其中

$$I_1 = v(\alpha(x),y)-v(x,y) = \int_x^{\alpha(x)} v_x(\xi,y)d\xi,$$

$$I_2 = v(\alpha(x),\beta(y))-v(\alpha(x),y) = \int_y^{\beta(y)} v_y(\alpha(x)+0,\eta)d\eta,$$

$$I_3 = v(\alpha(x'),\beta(y))-v(\alpha(x),\beta(y)) = \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x')} v_x(\xi,\beta(y)+0)d\xi,$$

$$I_4 = v(\alpha(x'),\beta(y'))-v(\alpha(x'),\beta(y)) = \int_{\beta(y)}^{\beta(y')} v_y(\alpha(x')+0,\eta)d\eta,$$

$$I_5 = v(\alpha(x'),y')-v(\alpha(x'),\beta(y')) = \int_{\beta(y')}^{y'} v_y(\alpha(x')+0,\eta)d\eta,$$

$$I_6 = v(x',y') - v(\alpha(x'),y') = \int_{\alpha(x')}^{x'} v_x(\xi,y')d\xi.$$

上面积分式中出现的 $\alpha(x)+0$ 等表示在格网线 $x=\alpha(x)$ 的上岸，而 $\beta(y)+0$ 等则表示在格网线 $y=\beta(y)$ 的右岸．而 I_3, I_4 的积分表达式的合理性，是由于 v 在剖分格网顶点处连续．

这样，我们有

$$v^2(x',y') + v^2(x,y) - 2v(x,y)\cdot v(x',y') \leqslant 6\sum_{k=1}^{6} I_k^2.$$

将上式两端积分 $\sum\limits_C \iint\limits_C dxdy \sum\limits_C \iint\limits_C dx'dy'$，即得

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_\Omega dxdy \iint\limits_\Omega v^2(x',y')dx'dy' + \iint\limits_\Omega dx'dy' \iint\limits_\Omega v^2(x,y)dxdy \\
&\quad - 2\iint\limits_\Omega v(x',y')dx'dy' \cdot \iint\limits_\Omega v(x,y)dxdy \\
&\leqslant 6\sum_{k=1}^{6}\{\sum_C \iint\limits_C dx'dy'(\sum_C \iint\limits_C I_k^2 dxdy)\}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

下面估计式(2.2)右端含有 I_k^2 的各项．由于

$$I_1^2 = |\int_x^{\alpha(x)} v_x(\xi,y)d\xi|^2 \leqslant |x-\alpha(x)| \int_x^{\alpha(x)} v_x^2(\xi,y)d\xi \leqslant h\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h} v_x^2(\xi,y)d\xi,$$

从而

$$\begin{aligned}
\sum_C \iint\limits_C I_1^2 dxdy &\leqslant h\sum_C \iint\limits_C dxdy(\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h} v_x^2(\xi,y)d\xi) \\
&= h\sum_{i=0}^{n-1}\int_{ih}^{(i+1)h} dx \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h}(\sum_{j=0}^{m-1}\int_{jh}^{(j+1)h} v_x^2(\xi,\eta)d\eta)d\xi,
\end{aligned}$$

当 $ih \leqslant x < (i+1)h$ 时，$\alpha(x) = ih$，则

$$\begin{aligned}
\int_{ih}^{(i+1)h} dx \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h}(\int_{jh}^{(j+1)h} v_x^2(\xi,\eta)d\eta)d\xi &= \int_{ih}^{(i+1)h} dx(\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{jh}^{(j+1)h} v_x^2(\xi,\eta)d\eta d\xi) \\
&= h\int_{jh}^{(j+1)h}\int_{ih}^{(i+1)h} v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_C \iint\limits_C I_1^2 dxdy \leqslant h^2 \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{jh}^{(j+1)h}\int_{ih}^{(i+1)h} v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta = h^2 \sum_C \iint\limits_C v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

所以

$$\sum_C \iint\limits_C dx'dy'(\sum_C \iint\limits_C I_1^2 dxdy) \leqslant Ah^2 \sum_C \iint\limits_C v_x(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$A = \sum_C \iint\limits_C dx'dy' = \iint\limits_\Omega dx'dy'.$$

现在估计含有 I_2 的项．

$$\begin{aligned}
I_2^2 &= |\int_y^{\beta(y)} v_y(\alpha(x)+0,\eta)d\eta|^2 \leqslant |y-\beta(y)| \int_y^{\beta(y)} v_y^2(\alpha(x)+0,\eta)d\eta \\
&\leqslant h\int_{\beta(y)}^{\beta(y)+h} v_y^2(\alpha(x)+0,\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

利用同阶嵌入不等式(1.1)，

$$\int_{\beta(y)}^{\beta(y)+h} v_y^2(\alpha(x)+0,\eta)d\eta \leqslant Kh^{-1}\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h}\int_{\beta(y)}^{\beta(y)+h} v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

因此

$$I_2^2 \leqslant K\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h}\int_{\beta(y)}^{\beta(y)+h} v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_C \iint_C I_2^2 dxdy &\leqslant K\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+h}\int_{\beta(y)}^{\beta(y)+h} v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)dxdy \\ &= Kh^2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta \\ &= Kh^2\sum_C \iint_C v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,\end{aligned}$$

上式中第一个等号，是由于当 $x_i \leqslant x < x_{i+1}$ 时 $\alpha(x) = x_i$，$y_j \leqslant y < y_{j+1}$ 时 $\beta(y) = y_j$. 因此

$$\sum_C \iint_C dx'dy'\left(\sum_C \iint_C I_2^2 dxdy\right) \leqslant AKh^2\sum_C \iint_C v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

下面估计含有 I_3 的项.

$$\begin{aligned}I_3^2 &= \left|\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x')} v_x(\xi,\beta(y)+0)d\xi\right|^2 \leqslant |\alpha(x')-\alpha(x)|\left|\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x')} v_x^2(\xi,\beta(y)+0)d\xi\right. \\ &\leqslant a\sum_{l=0}^{n-1}\int_{lh}^{(l+1)h} v_x^2(\xi,\beta(y)+0)d\xi \\ &\leqslant a\sum_{l=0}^{n-1}Kh^{-1}\int_{lh}^{(l+1)h}\int_{\beta(y)}^{\beta(y)+h} v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,\end{aligned}$$

上面最后不等式又利用了同阶嵌入(1.1). 从而

$$\begin{aligned}\sum_C \iint_C I_3^2 dxdy &\leqslant aKh^{-1}\sum_C \iint_C\left(\int_0^a\int_{\beta(y)}^{\beta(y)+h} v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)dxdy \\ &= aKh^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{ih}^{(i+1)h}dx\sum_{j=0}^{m-1}\int_{jh}^{(j+1)h}\left(\int_0^a\int_{\beta(y)}^{\beta(y)+h} v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)dy \\ &= a^2Kh^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}h\int_0^a\int_{jh}^{(j+1)h} v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta \\ &= a^2K\sum_C \iint_C v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_C \iint_C dx'dy'\sum_C \iint_C I_3^2 dxdy \leqslant a^2KA\sum_C \iint_C v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

同样可有

$$\sum_C \iint_C dx'dy'\sum_C \iint_C I_4^2 dxdy \leqslant b^2KA\sum_C \iint_C v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$\sum_C \iint_C dx'dy'\sum_C \iint_C I_5^2 dxdy \leqslant KAh^2\sum_C \iint_C v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$\sum_C \iint_C dx'dy'\sum_C \iint_C I_6^2 dxdy \leqslant Ah^2\sum_C \iint_C v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

这样，由(2.2) 及上述估计就可得到

$$2A\iint\limits_{\Omega} v^2dxdy-2(\iint\limits_{\Omega} vdxdy)^2\leqslant K'\sum_C\iint\limits_C(v_x^2+v_y^2)dxdy.$$

由此(2.1) 即得证．

2.2 Friedrichs 不等式(I)

设 $v\in S_h$，且 $\Lambda_0 v|_{\partial\Omega}=0$，则有

$$\iint\limits_{\Omega} v^2dxdy\leqslant K_1\sum_C\iint\limits_C(v_x^2+v_y^2)dxdy, \tag{2.3}$$

其中 K_1 与 v 及 h 无关，Λ_0 是以顶点为节点的分片双线性插值算子．

证明 由于 $\Lambda_0 v|_{x=0}=0$，

$$v(x,y)=v(x,y)-v(0,\beta(y))$$
$$=I_1+I_2+I_3$$

其中(参考图 2.2)

$$I_1=\int_0^{\alpha(x)}v_x(\xi,\beta(y)+0)d\xi,$$
$$I_2=\int_{\beta(y)}^{y}v_y(\alpha(x)+0,\eta)d\eta,$$
$$I_3=\int_{\alpha(x)}^{x}v_x(\xi,y)d\xi.$$

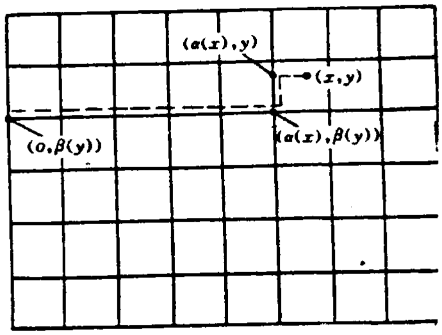

图 2.2

从而

$$v^2(x,y)\leqslant 3(I_1^2+I_2^2+I_3^2),$$
$$\iint\limits_{\Omega} v^2(x,y)dxdy\leqslant 3\sum_C\iint\limits_C(I_1^2+I_2^2+I_3^2)dxdy \tag{2.4}$$

而

$$I_1^2=|\int_0^{\alpha(x)}v_x(\xi,\beta(y)+0)d\xi|^2\leqslant|\alpha(x)|\int_0^{\alpha(x)}v_x^2(\xi,\beta(y)+0)d\xi$$
$$\leqslant a\int_0^a v_x^2(\xi,\beta(y)+0)d\xi,$$

$$\int_{jh}^{(j+1)h}I_1^2dy\leqslant a\int_{jh}^{(j+1)h}dy(\int_0^a v_x^2(\xi,\beta(y)+0)d\xi)=a\int_{jh}^{(j+1)h}dy\int_0^a v_x^2(\xi,y_j+0)d\xi$$
$$=ah\int_0^a v_x^2(\xi,y_j+0)d\xi\leqslant ah\cdot Kh^{-1}\int_0^a\int_{y_j}^{y_{j+1}}v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta$$
$$=aK\int_0^a\int_{y_j}^{y_{j+1}}v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

上式最后的不等式利用了同阶嵌入(1.1)．从而

$$\sum_C\iint\limits_C I_1^2dxdy=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{kh}^{(k+1)h}\int_{jh}^{(j+1)h}I_1^2dxdy$$
$$\leqslant aK\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kh}^{(k+1)h}dx\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^a\int_{y_j}^{y_{j+1}}v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta$$
$$=a^2K\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta=a^2K\sum_C\iint\limits_C v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

同理

$$\sum_C \iint_C I_2^2 dxdy \leqslant Kh^2 \sum_C \iint_C v_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$\sum_C \iint_C I_3^2 dxdy \leqslant h^2 \sum_C \iint_C v_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

因此由(2.4)及上述估计可得

$$\iint_\Omega v^2 dxdy \leqslant K_1 \sum_C \iint_C (v_x^2 + v_y^2)dxdy.$$

2.3 痕迹嵌入定理与 Frildrichs 不等式(Ⅱ)

设$\Gamma \subset \partial\Omega$是矩形区域$\Omega$的一段边界,则$\forall\, u \in S_h$,

$$\int_\Gamma u^2 ds \leqslant K\{\iint_\Omega u^2 dxdy + \sum_C |u|_{1,C}^2\}, \tag{2.5}$$

$$\iint_\Omega u^2 dxdy \leqslant K'\{\int_\Gamma u^2 ds + \sum_C |u|_{1,C}^2\}. \tag{2.6}$$

证明 设$\Gamma = \{x = 0, b_1 < y < b_2\}$,其上的剖分点为$y_{m_1} = b_1, y_{m_1+1}, \cdots, y_{m_2} = b_2$. 设$(0,y') \in \Gamma, y_{k'} \leqslant y' < y_{k'+1}$,则(见图 2.3)

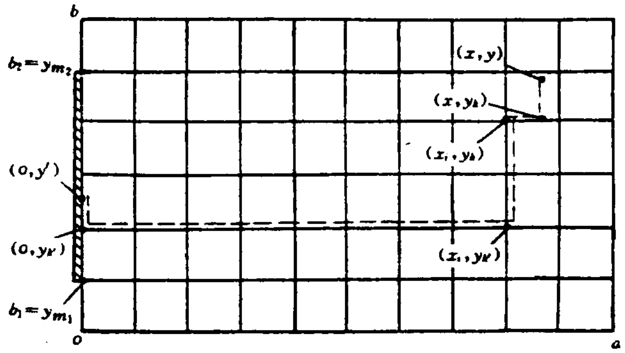

图 2.3

$$u(0,y') = u(x,y) + \int_y^{y_k} u_y(x,y)d\eta + \int_x^{x_i} u_x(\xi,y_k)d\xi$$
$$+ \int_{y_k}^{y_{k'}} u_y(x_i,\eta)d\eta + \int_{x_i}^{x_0} u_x(\xi,y_{k'})d\xi + \int_{y_{k'}}^{y'} u_y(x_0,\eta)d\eta. \tag{2.7}$$

由此即得

$$\frac{1}{6}u^2(0,y') \leqslant u^2(x,y) + h\int_{y_k}^{y_{k+1}} u_y^2(x,\eta)d\eta + h\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_x^2(\xi,y_k)d\xi$$
$$+ b\int_0^b u_y^2(x_i,\eta)d\eta + a\int_0^a u_x^2(\xi,y_{k'})d\xi + h\int_{y_{k'}}^{y_{k'+1}} u_y^2(x_0,\eta)d\eta$$
$$\leqslant u^2(x,y) + K_1 h\cdot h^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_k}^{y_{k+1}} u_y^2(\xi,\eta)d\eta d\xi$$
$$+ K_1 h h^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_k}^{y_{k+1}} u_x^2(\xi,\eta)d\eta d\xi + K_1 h h^{-1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_{k'}}^{y_{k'+1}} u_y^2(\xi,\eta)d\eta d\xi$$
$$+ K_1 b\cdot h^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_0^b u_y^2(\xi,\eta)d\eta d\xi + aK_1 h^{-1}\int_{y_{k'}}^{y_{k'+1}}\int_0^a u_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$\leqslant u^2(x,y) + K_1\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_k}^{y_{k+1}} u_y^2(\xi,\eta)d\eta d\xi + K_1\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_k}^{y_{k+1}} u_x^2(\xi,\eta)d\eta d\xi$$

$$+ K_1\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_{k'}}^{y_{k'+1}} u_y^2(\xi,\eta)d\eta d\xi + K_1 b\, h^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_0^b u_y^2(\xi,\eta)d\eta d\xi$$

$$+ K_1 a\, h^{-1}\int_{y_{k'}}^{y_{k'+1}}\int_0^a u_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

上面第二个不等式利用了同阶嵌入(11). 将上式两端对 y' 积分于 Γ 上:

$$\int_{b_1}^{b_2} \cdots\cdots dy' = \sum_{k'=m_1}^{m_2-1}\int_{y_{k'}}^{y_{k'+1}}\cdots\cdots dy' = \int_\Gamma \cdots\cdots ds,$$

即得

$$\frac{1}{6}\int_\Gamma u^2 ds \leqslant (b_2-b_1)u^2(x,y) + K_1(b_2-b_1)\int_{y_k}^{y_{k+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(u_x^2+u_y^2)d\xi d\eta$$

$$+ K_1 h\sum_{k'=m_1}^{m_2-1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_{k'}}^{y_{k'+1}} u_y^2(\xi,\eta)d\eta d\xi$$

$$+ K_1 b(b_2-b_1)^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_0^b u_y^2(\xi,\eta)d\eta d\xi$$

$$+ K_1 a\sum_{k'=m_1}^{m_2-1}\int_{y_{k'}}^{y_{k'+1}}\int_0^a u_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

将上式两端再对 x,y 积分于 Ω:

$$\iint_\Omega \cdots dxdy = \sum_C \iint_C \cdots dxdy = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\int_x^{x_{i+1}}\cdots dxdy,$$

即得

$$\frac{ab}{6}\int_\Gamma u^2 ds \leqslant (b_2-b_1)\iint_\Omega u^2 dxdy + K_1(b_2-b_1)h^2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(u_x^2+u_y^2)d\xi d\eta$$

$$+ K_1 a\, b\, h\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$+ K_1 b^2(b_2-b_1)\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_y^2(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$+ K_1 a^2 b\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_x^2(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$\leqslant K'_1\left\{\iint_\Omega u^2 dxdy + \sum_C\iint_C(u_x^2+u_y^2)dxdy\right\},$$

从而式(2.5)得证.

至于式(2.6)的证明完全同上,只是将(2.7)改写成下式

$$u(x,y) = u(0,y') - \int_y^{y_k} u_y(x,\eta)d\eta - \int_x^{x_i} u_x(\xi,y_k)d\xi$$

$$- \int_{y_k}^{y_{k'}} u_y(x_i,\eta)d\eta - \int_{x_i}^{x_0} u_x(\xi,y_{k'})d\xi - \int_{y_{k'}}^{y'} u_y(x_0,\eta)d\eta, \qquad (2.7')$$

然后有

$$\frac{1}{6}u^2(x,y) \leqslant u^2(0,y') + \left(\int_y^{y_k} u_y(x,\eta)d\eta\right)^2 + \left(\int_x^{x_i} u_x(\xi,y_k)d\xi\right)^2$$

$$+ \left(\int_{y_k}^{y_{k'}} u_y(x_i,\eta)d\eta\right)^2 + \left(\int_{x_i}^{x_0} u_x(\xi,y_{k'})d\xi\right)^2 + \left(\int_{y_{k'}}^{y'} u_y(x_0,\eta)d\eta\right)^2.$$

以下的估计完全如前，只是常数 K' 不同于 K，但仍与 u 及 h 无关，而只依赖于 Ω 及 Γ.

§3　对于多边形区域，三角形剖分的 Poincaré，Friedrichs 不等式

3.1　三角形剖分的拓扑及度量性质

设 Ω 是平面多边形区域，Γ' 是 $\bar{\Omega}$ 中的一段折线，π_h 是 Ω 的三角形剖分，并相容于 Ω 及 Γ' 的结构，$h_C=\mathrm{diam}C, C\in\pi_h, h=h_{\max}=\max\limits_C h_C, h'=h_{\min}=\min\limits_C h_C$，

$$\frac{h_{\max}}{h_{\min}}=\frac{h}{h'}<K_1<\infty.$$

考虑到平面多边形区域和三角形剖分的拓扑的及度量的性质，可以引入两个条形“正交”族

$$\mathscr{F}=\{F_1,\cdots,F_N\},\quad \mathscr{F}'=\{F'_1,\cdots,F'_{N'}\}.$$

使得

(i) 每个 条形 F_i 或 F'_k 是单元 $C_j\in\pi_h$ 的一个连通集合，

$$F_i=C_{j1}+C_{j2}+\cdots+C_{jn_i}, F_{i_1}\cap F_{i_2}=\phi \text{ 对于 } i_1\neq i_2,$$
$$F'_k=C_{l_1}+C_{l_2}+\cdots+C_{lm_k}, F'_{k_1}\cap F'_{k2}=\phi \text{ 对于 } k_1\neq k_2$$

(ii) $F_i\cap F'_k\neq\phi\qquad\forall\, i,k.$

(iii) 每个条形 F_i 或 F'_k 的侧向“宽度”$\leqslant K_2h$，而 $K_2=\mathrm{const.}>0$ 与 i,k 及 h 无关.

(iv) $\sum\limits_{i=1}^{N}F_i=\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{C_j\subset F_i}C_j=\Omega\sum\limits_{j=1}^{N_2}C_j$，即族 $\mathscr{F}$ 覆盖 Ω.

(v) 族 $\mathscr{F}'$ 横截于 Γ'：每个 F'_k 交 Γ' 于一条棱 B_{p_k}，而且这些棱覆盖 Γ'，即 $\sum\limits_{k=1}^{N'}B_{p_k}=\Gamma'$.

举例图示见图 3.1.

考虑到上述性质，对每一对点 $P\in\Omega, P'\in\Gamma'$，则存在唯一的一对 F_i, F'_k，使得 $P\in F_i, P'\in F'_k, F_i\cap F'_k\neq\phi$，且至少包含一个单元 C_j(不一定唯一)，C_j 包含一个点 Q(不一定唯一). 这样，可以指定两条路径(分别在条形 F_i, F'_k 内) $\overline{PQ}=\overline{QP}\subset F_i, \overline{P'Q}=\overline{QP'}\subset F'_k$. 每 一条路径(比如 $\overline{PQ}$) 是一条连接其端点 (P,Q) 的折线：

$$\overline{PQ}=\overline{P_0P_1}+\overline{P_1P_2}+\cdots+\overline{P_{m-1}P_m}, P_0=P, P_m=Q,$$

其中每个线段 $\overline{P_{r-1}P_r}$ 落在某个单元 $C_r\in F_i$ 中，而且连接点 $P_1,\cdots,P_{m-1}$ 是 S_h 中函数的零阶连续点，即 $\forall\, u\in S_h, u(P_r-0)=u(P_r+0)$. 对于

$$\overline{P'Q}=\overline{P'_0P'_1}+\overline{P'_1P'_2}+\cdots+\overline{P'_{n-1}P'_n}, P'_0=P', P'_n=Q,$$

具有类似的性质.

3.2　痕迹嵌入定理及 Friedrichs 不等式

设对应于剖分 π_h 的有限元空间 S_h 中的函数，在单元的每条棱上至少有一个零阶连续点. 则

$$\int_{\Gamma'}u^2ds\leqslant K\Big\{\iint\limits_{\Omega}u^2dxdy+\sum_C|u|^2_{1,C}\Big\}\quad\forall\, u\in S_h,\tag{3.1}$$

$$\iint\limits_{\Omega}u^2dxdy\leqslant K'\Big\{\int_{\Gamma'}u^2ds+\sum_C|u|^2_{1,C}\Big\}\forall\, u\in S_h,\tag{3.2}$$

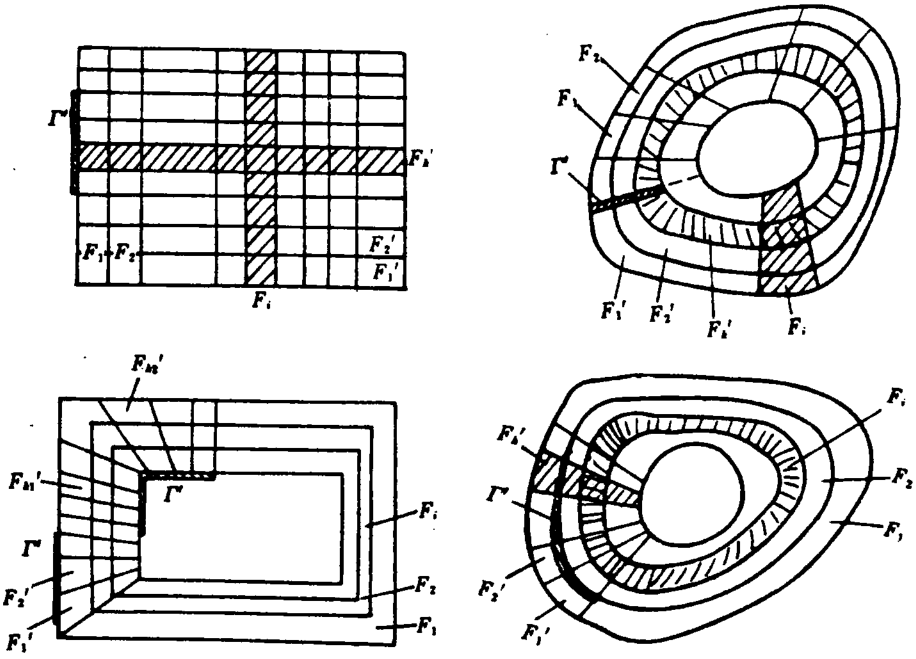

图 3.1

其中 $K, K' = \text{const.} > 0$ 与 h 无关.

证明 对任意给定的 $P \in \Omega, P' \in \Gamma'$,

$$u(P') = u(P) + \int_{\overrightarrow{PQ}} u_s ds + \int_{\overrightarrow{QP'}} u_s ds\ ,$$

从而

$$\frac{1}{3}u^2(P') \leqslant u^2(P) + \Big(\int_{\overrightarrow{PQ}} u_s ds\Big)^2 + \Big(\int_{\overrightarrow{QP'}} u_s ds\Big)^2$$

$$\leqslant u^2(P) + L\int_{\overline{PQ}} u_s^2 ds + L\int_{\overline{P'Q}} u_s^2 ds,$$

其中 L 是族 $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{F}'$ 中的路径的最大长度,而

$$\int_{\overline{PQ}} u_s^2 ds = \sum_{r=1}^{m} \int_{\overline{P_{r-1}P_r}} u_s^2 ds \leqslant \sum_{r=1}^{m} K_1 h^{-1} \iint_{C_r} (u_x^2 + u_y^2) dxdy$$

$$\leqslant K_1 h^{-1} \sum_{C \subset F_i} \iint_{C} (u_x^2 + u_y^2) dxdy, F_i = F_i(P),$$

在上式中 $\overline{P_{r-1}P_r} \subset C_r$,最后第二个不等式利用了同阶嵌入不等式(1.1).

类似地有

$$\int_{\overline{P'Q}} u_s^2 ds \leqslant K_1 h^{-1} \sum_{C \subset F'_k} \iint_{C} (u_x^2 + u_y^2) dxdy, F'_k = F'_{k(P')}.$$

那末

$$\frac{1}{3}u^2(P') \leqslant u^2(P) + LK_1 h^{-1} \{ \iint_{F_{i(P)}} (u_x^2 + u_y^2) dxdy$$

$$+\iint\limits_{F_{k(P')}}(u_x^2+u_y^2)dxdy\}$$

$$\leqslant u^2(P)+LK_1h^{-1}(|u|_{1,F_{i(P)}}^2+|u|_{1,F_{k(P')}}^2).$$

将上面不等式两端，对 P' 在 Γ' 上积分，而对 P 在 Ω 上积分，并注意

$$\int\limits_{\Gamma'}dP'\iint\limits_{\Omega}dP(\cdots)=\sum_{k=1}^{N'}\int\limits_{B_{p_k}}dP'\sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{F_i}dP(\cdots),$$

则有

$$\int\limits_{\Gamma'}dP'\iint\limits_{\Omega}dP(\frac{1}{3}u^2(P'))=\frac{1}{3}A\int\limits_{\Gamma'}u^2ds,A=\Omega\text{ 的面积},$$

$$\int\limits_{\Gamma'}dP'\iint\limits_{\Omega}dP(u^2(P))=L'\iint\limits_{\Omega}u^2dxdy,L'=\Gamma'\text{ 的长度},$$

$$\int\limits_{\Gamma'}dP'\iint\limits_{\Omega}dP(|u|_{1,F_{i(P)}}^2)=L'\sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{F_i}|u|_{1,F_{i(P)}}^2dP$$

$$=L'\sum_{i=1}^{N}\mathrm{area}F_i|u|_{1,F_i}^2\leqslant L'K_2h\sum_{i=1}^{N}|u|_{1,F_i}^2$$

$$\leqslant L'K_2h\sum_{C}|u|_{1,C}^2,$$

其中第三个不等式中的最后第二个不等式，是由于 $\mathrm{area}F_i\leqslant K_2h,i=1,2,\cdots,N$. 而

$$\int\limits_{\Gamma'}dP'\iint\limits_{\Omega}dP(|u|_{1,F'_{k(p')}}^2)=A\sum_{k=1}^{N'}\int\limits_{B_{p_k}}|u|_{1,F'_{k(p')}}^2dP'$$

$$=A\sum_{k=1}^{N'}(\mathrm{length}B_{p_k})|u|_{1,F'_{p_k}}^2\leqslant AK_3h\sum_{k=1}^{N'}|u|_{1,F'_{p_k}}^2\leqslant AK_3h\sum_{C}|u|_{1,C}^2.$$

综合起来，就有

$$\frac{A}{3}\int\limits_{\Gamma'}u^2ds\leqslant L'\iint\limits_{\Omega}u^2dxdy+K_4\sum_{C}|u|_{1,C}^2,$$

由此式(3.1)得证.

(3.2)的证明类似于(2.1)的证明.

3.3 Poincare'不等式

在3.2节开头关于 S_h 的假设条件下，

$$\iint\limits_{\Omega}u^2dxdy\leqslant K\{\sum_{C}|u|_{1,C}^2+(\iint\limits_{\Omega}udxdy)^2\}\quad\forall u\in S_h,\tag{3.3}$$

其中 K 与 h 无关.

证明 类似于上述 Friedrichs 不等式(3.2)的证明，所不同的只是将二个条形族 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 的地位调换一下. 将3.1节中性质(i)—(iii)仍保留，而将(iv)改成

$$\sum_{k=1}^{M}F'_k=\Omega,\text{即 }\mathscr{F}'\text{ 覆盖 }\Omega.$$

对任意给定的 $P\in\Omega,P'\in\Omega$ 有

$$u(P')-u(P)=\int\limits_{\overrightarrow{PQ}}u_sds+\int\limits_{\overrightarrow{QP'}}u_sds.$$

那末

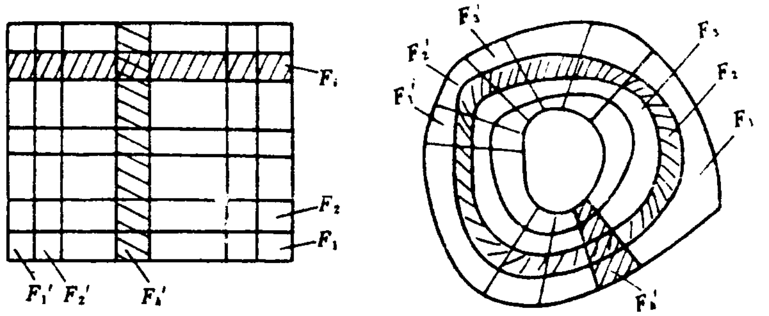

图 3.2

$$
\begin{aligned}
(u(P')-u(P))^2 &= u^2(P')+u^2(P)-2u(P)\cdot u(P') \\
&\leqslant 2\Big(\int_{\overrightarrow{PQ}} u_s ds\Big)^2 + 2\Big(\int_{\overrightarrow{QP'}} u_s ds\Big)^2 \\
&\leqslant 2L\int_{\overrightarrow{PQ}} u_s^2 ds + 2L\int_{\overrightarrow{QP'}} u_s^2 ds.
\end{aligned}
$$

关于上式右端二个积分的估计完全同 3.2 节，然后积分$\iint_\Omega dP' \iint_\Omega dP(\cdots)$，即可得到

$$
\begin{aligned}
A\iint_\Omega u^2(P')dP' &+ A\iint_\Omega u^2(P)dP - 2\iint_\Omega u(P')dP' \cdot \iint_\Omega u(P)dP \\
&= 2A\iint_\Omega u^2 dxdy - 2\Big(\iint_\Omega u dxdy\Big)^2 \\
&\leqslant K_5 \sum_C |u|_{1,C}^2.
\end{aligned}
$$

从而得证．

3.4 痕迹嵌入定理及 Friedrichs 不等式（续）

有限元空间 S_h 仍如 3.2 节，令 Λ_0 是以零阶连续点为插值节点的分片线性插值算子，即

$$u-\Lambda_0 u = 0 \quad 在 C 上 \quad \forall u \in P_1(C), \quad C \in \pi_h.$$

则由同阶嵌入不等式(1.1)及插值误差估计，可见

$$|u-\Lambda_0 u|_{0,B} \leqslant K h^{1/2} |u|_{1,C} \quad \forall B \subset \partial C, C \in \pi_h, u \in S_h. \tag{3.4}$$

我们有下述形式的痕迹嵌入定理及 Friedrichs 不等式．

$$\int_\Gamma (\Lambda_0 u)^2 ds \leqslant K\{\iint_\Omega u^2 dxdy + \sum_C |u|_{1,C}^2\}, \quad \forall u \in S_n, \tag{3.5}$$

$$\int_\Omega u^2 dxdy \leqslant K'\{\int_\Gamma (\Lambda_0 u)^2 ds + \sum_C |u|_{1,C}^2\}, \quad \forall u \in S_h. \tag{3.6}$$

证明：以证明(3.5)为例

$$\Lambda_0 u(P') = (\Lambda_0 u - u)_{P'-0} + u(P) + \int_{\overrightarrow{PQ}} u_s ds + \int_{\overrightarrow{QP'}} u_s ds,$$

则

$$\frac{1}{4}(\Lambda_0 u(P'))^2 \leqslant (\Lambda_0 u - u)^2_{P'-0} + u^2(P) + (\int_{\overrightarrow{PQ}} u_s ds)^2 + (\int_{\overrightarrow{QP'}} u_s ds)^2$$

因此，我们只要估计

$$\int_{\Gamma} dP' \iint_{\Omega} dP (\Lambda_0 u - u)^2_{P'-0} = A \int_{\Gamma-0} (u - \Lambda_0 u)^2 ds$$

$$= A \sum_{k=1}^{m} \int_{B_{P_k}} (u - \Lambda_0 u)^2 ds \leqslant KAh \sum_{k=1}^{m} \iint_{C_k} (u_x^2 + u_y^2) dxdy$$

$$\leqslant KAh \sum_{C} |u|^2_{1,C},$$

上式最后第二个不等式利用了估计式(3.4). 从而得证.

§4　高阶导数的积分不等式

设有限元函数空间 S_h 具有下述性质：在单元顶点处，函数连续，而在单元的公共边上至少有函数的法向导数的一个连续点. 那末以前的不等式对于 $u \in S_h$ 仍然成立：

$$\int_{\Gamma} (\Lambda_0 u)^2 ds \leqslant K_1 \left\{ \iint_{\Omega} u^2 dxdy + \sum_{C} |u|^2_{1,C} \right\},$$

$$\iint_{\Omega} u^2 dxdy \leqslant K_2 \left\{ \int_{\Gamma} (\Lambda_0 u)^2 ds + \sum_{C} |u|^2_{1,C} \right\},$$

$$\iint_{\Omega} u^2 dxdy \leqslant K_3 \{ (\iint_{\Omega} u dxdy)^2 + \sum_{C} |u|^2_{1,C} \}.$$

现在我们要证明，将 u 替换成 u_x, u_y 时上述不等式仍成立.

过去的证明，利用了恒等式

$$v(P') = v(P) + \int_{\overrightarrow{PQ}} v_s ds + \int_{\overrightarrow{QP'}} v_s ds, \tag{4.1}$$

其中

$$\overrightarrow{PQ} \subset \mathscr{F}_{i(p)}, \overrightarrow{P'Q} \subset \mathscr{F}'_{k(p')},$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_{m-1}P_m}, P_0 = P, P_m = Q,$$

$$\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{P'_0P'_1} + \overrightarrow{P'_1P'_2} + \cdots + \overrightarrow{P'_{n-1}P'_n}, P'_0 = P', P'_n = Q,$$

而中间点 $P_1, P_2, \cdots, P_{m-1}$ 以及 $P'_1, P'_2, \cdots, P'_{n-1}$ 均取为函数 v 的连续点，故恒等式(4.1)是正确的. 现在 $v = u_x$ 或 u_y，则在线元上一般可以没有连续点.

现取 $P_1, \cdots, P_{m-1}$ 及 $P'_1, \cdots, P'_{n-1}$ 均为 u 的法向导数连续点，即 u_n 连续，但 u_s 可能间断. 因此 u_x, u_y 在这些点都可能有“跳跃性”间断. 这样对于 $v = u_x$，等式

$$\int_{\overrightarrow{PQ}} v_s ds = \sum_{r=1}^{m} \int_{\overrightarrow{P_{r-1}P_r}} v_s ds$$

不再成立，而应代之以

$$\int_{\overrightarrow{PQ}} v_s ds = \sum_{r=1}^{m} \int_{\overrightarrow{P_{r-1}P_r}} v_s ds + \sum_{r=1}^{m-1} [v]_{P_r}, \tag{4.2}$$

其中

$$[v]_{P_r} = [u_x]_{P_r} = v(P_r + 0) - v(P_r - 0) = u_x(P_r + 0) - u_x(P_r - 0). \tag{4.3}$$

为了估计$[u_x]_{P_r}$，只需估计$[u_s]_{P_r}$，因为$[u_n]_{P_r} = 0$，为此，首先给出 Lagrange — Hermite 插值的几个误差估计式，设 Λ 是 Lagrange — Hermite 插值算子，且

$$u - \Lambda u = 0，在 C \in \pi_h 上，\forall\, u \in P_k(C),$$

$P_k(C)$ 是定义在单元 C 上的次数 $\leqslant k$ 的多项式全体. 则对 $B \subset \partial C$，单元 C 的边界，

$$\begin{cases} \max\limits_B |u - \Lambda u| \leqslant K h^{k+\frac{1}{2}} |u|_{k+1,B}, \\ \max\limits_B |u_s - (\Lambda u)_s| \leqslant K h^{k-\frac{1}{2}} |u|_{k+1,B}, \\ |u - \Lambda u|_{0,B} \leqslant K h^{k+1} |u|_{k+1,B}, \\ |u_s - (\Lambda u)_s|_{0,B} \leqslant K h^{k} |u|_{k+1,B}, \end{cases} \tag{4.4}$$

其中 K 是与 u 及 h 无关的常数. 当 $k = 1$ 时，即为一次插值，即有

$$\begin{cases} \max\limits_B |u - \Lambda_0 u| \leqslant K h^{\frac{3}{2}} |u|_{2,B}, \\ \max\limits_B |u_s - (\Lambda_0 u)_s| \leqslant K h^{\frac{1}{2}} |u|_{2,B}, \\ |u - \Lambda_0 u|_{0,B} \leqslant K h^{2} |u|_{2,B}, \\ |u_s - (\Lambda_0 u)_s|_{0,B} \leqslant K h |u|_{2,B}. \end{cases} \tag{4.5}$$

现在估计(参考图 4.1)

$$[u_s]_{P_r} = u_s(P_r + 0) - u_s(P_r - 0)$$
$$= (u_s - (\Lambda_0 u)_s)_{P_{r+0}} - (u_s - (\Lambda_0 u)_s)_{P_{r-0}}.$$

由估计式(4.5) 及同阶嵌入不等式(1.1)，

$$\max_{B_\pm} |u_s - (\Lambda_0 u)_s| \leqslant K h^{\frac{1}{2}} |u|_{2,B\pm},$$

故

$$|[u_s]_{P_r}| \leqslant K h^{\frac{1}{2}} (|u|_{2,B_+} + |u|_{2,B_-})$$
$$\leqslant K_1 (|u|_{2,C_+} + |u|_{2,C_-}).$$

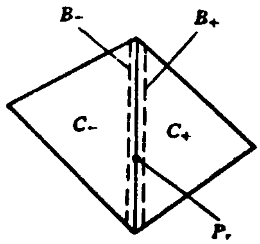

图 4.1

因此

$$|[u_x]_{P_r}|^2 \leqslant K_1 (|u|^2_{2,C_+} + |u|^2_{2,C_-}),$$

同样

$$|[u_y]_{P_r}|^2 \leqslant K_1 (|u|^2_{2,C_+} + |u|^2_{2,C_-})$$

其中 C_+, C_- 为邻接 P_r 的二个面元. 因此有

$$\Big(\sum_{r=1}^{m-1} [u_x]_{P_r}\Big)^2 \leqslant m \sum_{r=1}^{m-1} [u_x]^2_{P_r} \leqslant K h^{-1} \sum_{r=1}^{m-1} (|u|^2_{2,C_r^+} + |u|^2_{2,C_r^-}) \leqslant 2K h^{-1} \sum_{C \subset F_{i(P)}} |u|^2_{2,C}.$$

其它各项类似处理，然后按$\int_\Gamma dP' \iint_\Omega dP(\cdots)$ 积分，即可得

$$\sum_{\gamma\subset\Gamma}\int_{\gamma}u_x^2ds\leqslant K\Big\{\sum_{C}\iint_{C}u_x^2dxdy+\sum_{C}|u|_{2,C}^2\Big\}.$$

同样

$$\sum_{\gamma\subset\Gamma}\int_{\gamma}u_y^2ds\leqslant K\{\sum_{C}\iint_{C}u_y^2dxdy+\sum_{C}|u|_{2,C}^2\},$$

因此

$$\sum_{\gamma\subset\Gamma}|u|_{1,\gamma}^2\leqslant K\sum_{C}\|u\|_{2,C}^2. \tag{4.6}$$

由于在单元的顶点，函数 $u\in S_h$ 连续，而在单元公共边界上至少有 u_n 的一个连续点，故可定义 $(\Lambda_0u)_s$ 及 Λ_1u_n，其中 Λ_0 是以单元三顶点为节点的线性插值算子，而 Λ_1 是以 u_n 连续的点为节点的线性插值算子. 则命，在 ∂C 上，

$$\tilde{\Lambda}_0u_x=-\sin\theta(\Lambda_0u)_s+\cos\theta\cdot\Lambda_1u_n,$$

$$\tilde{\Lambda}_0u_y=\cos\theta\cdot(\Lambda_0u)_s+\sin\theta\cdot\Lambda_1u_n,$$

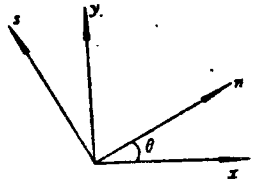

图 4.2

（见图 4.2）. 则同样地可证（如 3.4 节）

$$\sum_{\gamma\subset\Gamma}\int_{\gamma}(\tilde{\Lambda}_0u_x)^2ds\leqslant K\sum_{C}\|u\|_{2,C}^2,$$

$$\sum_{\gamma\subset\Gamma}\int_{\gamma}(\tilde{\Lambda}_0u_y)^2ds\leqslant K\sum_{C}\|u\|_{2,C}^2,$$

由此即得

$$\sum_{\gamma\subset\Gamma}|\tilde{\Lambda}_0u|_{1,\gamma}^2\leqslant K\sum_{C}\|u\|_{2,C}^2. \tag{4.7}$$

完全类似地可证下述 Friedrichs 不等式

$$\sum_{C}|u|_{1,C}^2\leqslant K\{\sum_{\gamma\subset\Gamma}|u|_{1,\gamma}^2+\sum_{C}|u|_{2,C}^2\},$$

以及

$$\sum_{C}|u|_{1,C}^2\leqslant K\{\sum_{\gamma\subset\Gamma}\int_{\gamma}((\tilde{\Lambda}_0u_x)^2+(\tilde{\Lambda}_0u_y)^2)ds+\sum_{C}|u|_{2,C}^2\}.$$

编者注　本节结论也完全适用于 Zienkiewicz 非协调元空间（不要求三平行方向剖分）. 而且证明可更简单，只要取路径的中间点 $P_1,\cdots,P_{m-1}$ 及 $P'_1,\cdots,P'_{n-1}$ 为剖分顶点即可. 这个结论对于 TRUNC 有限元方法是有用的.