

现代数理科学中的一些非线性问题

SOME NONLINEAR PROBLEMS IN MODERN MATHEMATICS AND PHYSICS

物理世界的典型现象为平衡、振动和波动传播等问题,在数学上大致分为两大类:线性和非线性.当问题限于小变形的平衡,或微振动或微扰波时,可以归结为线性数学方程,这时适合线性迭加原理,一般说来恒有唯一解.经典的电磁场,小变形弹性力学及现代的量子力学等都是线性理论的范例.自从发明微积分以来,特别经过十九世纪,对于线性微分方程已发展积累了比较成熟的解法和理论,它和物理与技术的发展一直是密切配合相互促进的.20年代柯朗与希尔伯特的著作“数学物理方法”作了阶段性总结,它几乎立即地对于当时酝酿中的物理学的重大突破即量子力学的诞生起了推动作用.

由于现代科学技术的发展,无论在物理、力学、技术科学或在地学、化学、生物学中,愈来愈多地面临本质上非线性现象,如大变形的平衡,大振幅波、非线性耦合共振或形态突变等等.爱因斯坦,玻恩,海森堡等人也都设想物理的基本规律应该非线性.但是,非线性问题的数学难度很大,这时线性迭加原则不再成立,方程可以有解,也可以没有解,也可以有多重解.除了特殊情况之外,至今没有系统化的解法和理论,这就限制了数学方法对于科学技术的深入应用.

近年来,在一些非线性问题上特别是非线性失稳,分岔和突变现象以及非线性波包括耗散波和色散波等等,呈现了新苗头,取得了若干数学上有独特色彩并有启发意义的成果.这些征兆表明,“非线性关”并非高不可攀,难不可克.以下将尽可能用统一的观点作简单说明,并提出一些看法,未必正确.鉴于这些问题都具有突出的典型性和宽广的物理背景,因此可以设想,这些方面的研究进展对于科学技术的许多领域会有相当大的意义甚至可能推动一些新的突破.

1. 非线性失稳、分岔与对称破坏

在弹性力学、流体力学、激光物理、凝聚态物理、高能物理以至化学反应动力学、生物化学、生态学、地貌学等等不同的科学领域内有一系列的现象,它们的物理背景、运动规律和数学方程形式各不相同,但却具有相同的或非常相似的数学上的本质特征,例如工程梁柱的超载屈曲,桥梁结构的崩坍,星体自转加快时形状的自发演变,铁磁化以及其他相变临界现象等等.这些体系的平衡状态都受控于一个参数,当参数变至某个临界点时,本来稳定的平衡状态变为不稳定而由某种新的几何形式的稳定状态所代替,这就是失稳与分岔现象.与此同时,体系本身具有一定的对称性,本来的稳定平衡也必具有相应的对称性,

但失稳分岔后的新的平衡态却成为不对称的,这就是对称性的自发破坏,近年来它在凝聚态物理和高能物理中被重视,事实上则是宏观自然界的常见现象.又例如热对流中细胞状流纹,超临界粘性流的涡漩流纹,第二类超导体的涡旋图纹,圆柱壳体超载的屈曲波纹,土壤干燥化时的龟裂,背风波鳞片状云纹,某些催化反应中呈现的螺卷结构以及晶体的螺旋生长等等也都是物理机理互异,但几何的表观上有惊人的相似,也是有共同的失稳,分岔和对称破坏等数学特征.因此有必要也有可能建立起统一的数学方法和理论.事实上,上世纪末彭加勒以来发展的分岔理论以及朗道的相变理论等已经作了准备,在现代数学分析和拓扑方法的基础上已经取得进展,包括以下的2.

2. 构造稳定性与突变理论

30年代苏联安德罗诺夫(力学家)和庞特利亚金(数学家)提出了构造稳定性的概念,即当一切可能影响到一个体系的行为的因素作微小变化时,体系行为的定性的(拓扑的)结构应该不变.近年法国数学家托姆强调这一概念对于一切自然科学的认识论上的重要性,并在此基础上提出了突变的几何理论作为研究各门科学中的形态变化的数学方法.一切过程总是含有缓进的、量变的阶段以及急剧跳跃或质变环节即突变.缓进阶段具有构造稳定性,微积分就是处理这类过程的合适的数学工具,但对突变现象就不合适.托姆提出了定性的、几何的、拓扑的方法.托姆证明了对于一类特定的突变,当外部控制参数的个数不超过4时只有七种基本模式,而不论体系的内部状态是如何复杂.这一理论有很大的应用潜力,尤其是对高度复杂的现象.物理学中朗道的相变理论实质上是突变理论的先行.但后者具有更大的概括性和普适性和更鲜明的直观性.特别适合于唯象理论分析.突变理论在西方引起轰动,毁誉参半.看来这一理论的主导思想基本上是符合辩证法的.它强调了定性方法特别是“形象思维”对科学理论分析的重要性.在数学上,突变理论还在初创阶段,但已经是非线性分岔理论的一大进展.如能把这些定性的、几何的方法与定量的、分析的方法辩证地统一起来必将使分岔理论提到新的高度.

3. 非线性耗散波与反应扩散方程

近年来逐渐明确,不论是物理学的或化学的或甚至生物学的、生态学的反应过程都具有相似的数学机理,在空间均匀的情况下归结为含有反应速率项的常微分方程组.当考虑到空间效应时还要增加扩散项而得到所谓反应扩散方程,这是非线性抛物型偏微分方程组,例如核反应堆中子扩散,激光辐射的模式竞争与合作现象,爆轰波传播,火焰传播、催化反应、神经脉冲传播,传染病传播,遗传基因传播以至于生态学中种群竞争与合作现象,数理人口论中的动态波等等都是背景各殊而数学特征相似,都是包含种类的增殖衰减即生与灭的动态过程.反应扩散方程是活性介质即可激发介质中波动传播的方程,它在化学、生物学中的重要性是和经典的波动方程在物理力学中的重要性相当.反应扩散过程是在一个或多个控制参数的支配下进行的.当达到临界值时,原有的平衡态失稳分岔而自发形成具有较高组织性的新的稳定的结构形态.经过一次二次或更多次的分岔可以逐次演进到愈来愈高级的结构层次.经典的热对流,贝纳细胞状结构以及更为复杂化的结构的逐次形成就是一例.近年来引人注目的查波金斯基化学反应中显示了层状以至于旋卷状等更为丰富多采的结构形式.1977年获得诺贝尔奖金的普里戈金提出的耗散结构理论正是试图用这种通过逐次分岔逐次提高组织结构层次的思想来说明物理的、化学的以至于生物的进化.

4. 非线性色散波与孤立子

近年来对于另一类非线性波即色散波方程发现了一系列具有丰富内容和独特色彩的数学性质并有多方面的物理应用,引起了广泛重视.在波动过程中,非线性效应与色散效应各自引起不同性质的波形畸变,但也可能达致平衡而形成波形不变的脉冲波即孤立波,发现于十九世纪.最近则发现不同的孤立波经过相互作用后波形与速度保持不变,具有象粒子那样的高度稳定性,这就是孤立子,并且这是一大类非线性色散波方程的通性.与此同时还建立了非线性波方程与线性波方程本征值问题的独特联系,从而创造了求解非线性波方程的系统化的“散射反演方法”,这也是非线性方程理论上的重大突破.由于孤立子是具有某种结构形态的数学解,具有很大的直觉启发性,适合于唯象理论分析的需要,因此很快地被应用到流体力学、固体力学、等离子学、激光物理、非线性光学、位错、超导、超流、液晶、磁畴以至于量子场论、基本粒子理论等等,影响极大.

孤立波导源于浅水力学,曾经是十九世纪后半期欧洲学术界关心和争论的一个主题,经过了几十年的沉寂后,现在以孤立子的新面貌和远为活跃的姿态和声势重登现代科学舞台,显示了广阔的科学意义和发展前景.如能对更多的非线性场方程找到更多的孤立子解或类似的结构性的解并在理论上取得更大进展的话,则数学物理的面貌必将大为改观.

非线性问题的困难也在于因为缺少解法而使人们对于问题的感性认识异常贫乏,因此就谈不到系统理论的发展.电子计算机的出现和计算方法的应用使人们能够用数值解的手段获得和积累有关方程的解的定性定量的感性材料,这就大有助于理论的发展.对于上面谈到的非线性失稳分岔和非线性波的理论发展,情况确是如此.最突出的是人们利用计算机求色散波方程的数值解并将其结果用电影显示,从而“发现”了孤立子.当然,更为主要的是,在这种感性材料的基础上,通过人的主观能动性,通过人的理论思维,才能得到真正的发明创造.