数学物理中的反问题

INVERSE PROBLEMS IN MATHEMATICAL PHYSICS

数学物理方程中的问题大致可以分为两类。一类问题是在给定的方程模式下，再给出规定具体环境的定解条件，如方程的系数包括源项或边界条件等，人们就可试图求解以便定出过程演化、联系影响的定量特征，一般称为正问题或正演问题，起着由因推果的作用，它们的研究与应用都比较成熟，迄今占着主导地位。另一类问题则是在给定的方程模式下，人们已知其解或解的某些部分，要求反过来求该方程的系数，源项或边界的形状等等，这就是所谓反问题或反演问题，起着倒果求因的作用。反问题的研究发展虽然还未成熟，但近年来由于应用上的需要，特别是为要查明不可达、不可触之处的形貌性态，为了由表及里、索隐探秘，就得用特定的物理手段以取得反响信息，并据此提成数学上的反问题来求解。在经济、国防、科技以及生活领域的资源勘探、遥感遥测、无损探伤、诊断构象、目标侦察等等问题上都有重要应用，工程技术中的定向设计和系统识别等问题也属于这类范畴。

下面根据历史的渊源，扼要介绍一些在理论和方法上有代表性，在实践应用上有重要意义的反问题。

§1 Huygens 等时摆

重力摆的运动方程是

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial s},\quad U=mgy(s) \tag{1}$$

此处 s 为弧长坐标，$y=y(s)$ 为轨线，设 l 为摆长，当取圆周轨道时，$s=l\theta,\ y=l(1-\cos\theta)$，运动方程成为

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta \tag{2}$$

取小幅角近似，$0\sim\theta\sim\sin\theta$，方程简化为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta,\quad \text{周期 } T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3}$$

这就是单摆的等时性，但只是近似的。圆周摆的严格解的周期则是

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}d\theta=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\cdots)$$

它是不等时的，依赖于初始角 θ_0 。 Huygens (1673) 提出并解决了定出摆的轨线形状使其严格等时 [1] 。

仿照单摆方程取 $y = s^2/2l$ 即得

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

由 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 得轮半径为 $l/4$ 的旋轮线

$$x = \frac{l}{4}(\phi + \sin\phi), \quad y = \frac{l}{4}(1 - \cos\phi), \quad s = l\sin\phi/2$$

这是历史上最早的反问题雏型，也是最早的定向设计。

§2 Abel 积分方程

Abel (1823) 把 Huygens 问题推广为：已知从高度 $y = \eta$ 降至 $y = 0$ 的走时曲线 $\tau = \tau(\eta)$, 反求轨道曲线 $y = y(s)$ 。当 $y(s)$ 为单调时导出下列积分方程及其反演公式：

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^\eta \frac{s'(y)dy}{\sqrt{\eta - y}} = \tau(\eta),$$

$$s(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^y \frac{\tau(\eta)d\eta}{\sqrt{y - \eta}}$$

取 $\tau(\eta) =$ 常数即得旋轮线，这是历史上最早的积分方程，也是最早的完整形式的反问题。经过四分之三个世纪以后， Hebglotz–Wiechebt (1905–07) 应用 Abel 型反演解决了在一定的对称条件下根据地震波的走时曲线反推地层内部形貌的方法，据此 Mohobovic (1909) “发现”地壳与地幔之间的断层，自此以后 Abel 反演广泛应用于地震学、地球物理、空间探测、形貌重构、显微成象以及立体构成 (Stereology) 等众多领域 [2,3,4] 。

§3 Radon 变换

已知函数 $f(x)$, $x \in R^n$, 可以算出它在超平面 $\alpha \cdot x = p$ 的积分值。

$$\hat{f}(\alpha, p) = g(\alpha, p) = \int_{\alpha\cdot x = p} f(x)dx^{n-1}, \quad \alpha \in S^{n-1}, \quad p \in R$$

能否从函数 $g(\alpha, p)$ 重构 $f(x)$? 在二维圆对称的情况 ($r^2 = x_1^2 + x_2^2$), 问题归结为 Abel 反演

$$f(x_1, x_2) = F(r), \quad g(\alpha_1, \alpha_2, p) = G(p)$$

$$G(P) = 2\int_\rho^\infty \frac{rF(r)dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad F(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{G'(p)dp}{\sqrt{p^2 - r^2}}$$

Lorentz (1906) 首先解决了三维反演：

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{s^2}[g'_p(\alpha, p)]_{p=\alpha\cdot x}d\alpha$$

Radon 则系统提出并解决了一般 n 维反演 [5,6] 包括二维反演：

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_S [\frac{1}{p}\cdot g'_p(\alpha, p)]_{p=\alpha\cdot x}d\alpha$$

Radon 变换与 Fourier 变换有密切联系，即 n 维 F.T. 可以表为 n 维 R.T. 与对变量 P 的一维 F.T. 的组合，但 R.T. 比 F.T. 有更突出的几何直观性，并有与微分算子的互换性 $\widehat{\Delta u} = \frac{\partial^2}{\partial p^2}\hat{u}$, 从而使它成为微分方程理论中的有效工具。

Radon 变换自创始后又经历了四分之三个世纪才显示了实践应用上的重要性。当前计算机化 X 光分层扫描构象 (Tomography[7]) 的数学基础就是二维 R.T., 这是 X 光自 Roentgen 发明 (1900 年诺贝尔奖) 以来在医疗诊断上的最大进展 (Hounsfield–Cormack, 1979 年诺贝尔奖) 。基于 R.T. 的分层扫描也可借助于声波、光波、电磁波、地震波，从而对于无损探伤、射电望远镜、电子显微镜、雷达目标重构、等离子体监测和地震勘探油气数据处理等多方面有广泛应用。特别是基于三维 R.T. 的核磁共振分层构象，预期在诊断效能及无伤害性方面均远优于 X 光，正为众所瞩目。

§4 Gelfand–Levitan 散射反演

一维 Schrodinger 方程，即 Sturm-Liouville 方程

$$(-\frac{d^2}{dx^2} + U(x))\psi = E\psi$$

的正演问题是从给定的在量子力学中代表位势，在波动传播中代表介质阻抗的 $U(x)$ 推算其谱，即本征值 E 和本征函数的无穷远处的散射性态。

离散谱：

$$E = -\lambda_n < 0, \quad \psi_n(x) \sim C_n e^{-\lambda_n x}, \quad x \to +\infty$$

连续谱：

$$E = k^2 > 0, \quad \psi(k,x) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + R(k)e^{ikx}, & \text{当} x \to +\infty \\ e^{-ikx}, & \text{当} x \to -\infty \end{cases}$$

所谓基于谱的散射反演问题要求从已知谱 $-\lambda_n$, k^2 及其相应的散射量 C_n, $R(k)$ 反推函数 $U(x)$ 。为此 Gelfand–Levitan (1951) 提出了独特的方法，建立积分方程 [8]

$$K(x,y) + A(x+y) = \int_x^\infty K(x,z)A(y+z)dz = 0$$

该

$$A(x) = \sum_n C_n^2 e^{-\lambda_n x} + \frac{l}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(k)e^{ikx}dk$$

对于 $x \le y$ 求解 $K(x,y)$, 然后

$$U(x) = 2\frac{d}{dx}k(x,x)$$

当对 Schrodinger 方程应用几何渐近 (即 W.K.B. 方法) 时，则上述反演问题简化为 Abel 型方程，因此，和 R.T. 相仿， G.L. 反演是 Abel 反演的另一发展，这三者之间的理论联系尚待探索。 G.L. 方程应用于量子力学的位势重构，层状介质波动速度反演，抛物型方程的扩散、传热系数反演，自控系统最优设计以及孤立子理论等许多方面。

另一类与上述问题相平行的是所谓基于动态响应的散射反演，特别是对于波动方程

$$\rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \operatorname{grad}\rho c^2 \operatorname{div}\vec{u} \quad (z < 0)$$

在地表原点受激后震波在地下半空间传播，并在地表 $(z=0)$ 收取散射回来的反响，要求由表及里推出反映地下构造的介质参数分布，如 c(波速), ρ(密度) 或其组合 ρc(阻抗) 。这是地震探油技术中关键性数学问题。 G–L 方法可以用于一维层状介质模型。如何把它推广到实际的三维或探索其它的有效途径乃是有重大实用价值和理论意义的课题。例如，传统而较粗放的射线法即几何渐近法仍有很大的发展前景。从地表各点间的沿短程线的走时来重构地下的黎曼度量的问题相当于一种广义的非线性的 R.T., 这里取的不是直线积分而是短程曲线积分，这和 R.T. 一样都是所谓积分几何的问题 [5,9], 对此近年兴起的付氏积分算子以及奇点分类的拓扑理论是合适的工具 [10] 。

§5 几何的反演问题

类似于上述反谱反射散问题还有其他的几何性质的反演问题。例如，反谱构形的问题，即已知 Laplace 算子在 Dirichlet 边界条件下的谱 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$, 能否反推区域 Ω 的形状，即人们能否“以耳代目”，“听出”鼓的形状 [11]? 虽然问题的解答基本上是否定的，但是根据谱确可推出一系列有关 Ω 的几何信息，例如在二维情况有渐近展开 $(t \to 0)$

$$\sum_n e^{-\lambda_n t} = \frac{A}{4\pi t} - \frac{L}{4(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{6}(1-H) + O(1),$$

这里 A 是 Ω 的面积， L 是 $\partial\Omega$ 的长度， H 是 Ω 内的孔穴数等等 [12] 。由此渐近展开还可能推出更多的关于 Ω 的几何信息。

另一类是反射构形问题，即入射平面波 $e^{i(\alpha\cdot x)k}$ 被障碍物 Ω 干扰产生散射波 ψ_α, 它是 Helmholtz 方程

$$-\Delta\psi_\alpha = k^2\psi_\alpha$$

在区域 Ω 外部的 Dirichlet (或 Neumann) 问题的解，并且 (三维情况)

$$\psi_\alpha(\gamma,\beta) = \frac{e^{ikr}}{r}A(\alpha,\beta,k) + O(\frac{1}{r^2}), \quad r\to\infty$$

$|A|^2$ 物理上可测量的散射截面， $\alpha,\beta \in S^2$ 分别是入射角和散射角。能否根据散射截面数据反推 Ω 的形状？在雷达目标的侦查以及反射器的综合设计等方面就需要解决这样问题。可以证明 [13], 对于凸体 Ω 在高频时，

$$|A(\alpha,\beta,k)|^2 \to \frac{(R(\alpha,\beta))^2}{K(\alpha-\beta)}, \quad k\to\infty, \quad \alpha\neq\beta$$

此处 $k(\alpha-\beta)$ 为 $\partial\Omega$ 上法向并行于 $\alpha-\beta$ 处的高斯曲率， $R(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha,\beta)-1}{|\alpha-\beta|^2}$ 为反射系数，因此足够多的散射截面数据可以定出 $\partial\Omega$ 上的曲率分布 $K(\alpha)$, 因此 $\partial\Omega$ 的重构归结于一个微分几何反演问题，即 Minkowski 问题：已知球 S^{n-1} 上正函数 $K(\alpha)$ 满足条件

$$\int_{S^{n-1}} \frac{\alpha\, d\alpha}{K(\alpha)} = 0$$

能否在 R^n 中重构凸面 $\partial\Omega$ 使得对应的高斯曲率分布就是已知的 $K(\alpha)$? 答案是可能的，而且除了刚性运动外是唯一的 [14] 。

以上的例子以及其他许多问题，包括 Abel, Radon, Gelfand 反演都说明积分几何与反演问题有密切的背景联系，特别在理论基础和算法发展方面有指导意义。

参 考 文 献

1 Sommerfeld A. Lectures on Theoretical Physics, Vol.1: Mechanics. Trans from 4th German ed. by Martin Stern O. Academic Press, 1952

2 Keller J B. Inverse Problems. American Mathematical Monthly. 1976 83(2): 107–118

3 Landau L D, Lifshitz E M. Mechanics. 3rd ed., Tr. from the Russian by J.B. Sykes and J.S. Bell, Oxford, Pergamon, 1976.

4 Aki K, Richards P G. Quantitative Seismology: Theory and Methods. San Francisco: Freeman and Company, 1980

5 Gelfand I M, Shilov G E. Generalized Functions, Vol 1: Properties and Operators. New York: Academic Press, 1966

6 Helgason S. The Radon Transform. Boston: Birkhauser, 1980

7 Herman G T, ed. Image Reconstruction from Projections, Implemantion and Applications. Berlin: Springer, 1979

8 Chadan K, Sabatier P C. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1989

9 Romanov V G. Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations. Berlin: Springer, 1974

10 Dangelmayr G, Guttinger E T. Topological Approch to Remote Sensing. Geophys J of the Royal Astronomical Society. 1982 7: 79-126

11 Kac M. Can One Hear the Shape of a Drum? American Mathematical Monthly. 1966 73(4): 1–23

12 Singer I M. Eigenvalues of the Laplacian and Invariants of Manifolds. Proc of the Intern Congress of Mathematicians, Vol 1. Vancouver. 1974

13 Majda A. High Frequency Asymptotics for the Scattering Matrix and the Inverse Problem of Acoustical Scattering. Communication on Pure and Applied Mathematics. 1976 29(3) 261–291

14 Chen S Y, Yau S T. On the Regularity of the Solution of the n-Dimentional Minkowski. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1976 29(5): 495–516