具有小周期振荡系数的 Rosseland 方程多尺度分析

张乔夫

摘要

Rosseland 方程是热防护系统中常用的传导-辐射耦合传热模型之一. 本文主要研究具有小周期振荡系数的 Rosseland 型方程的适定性、相关数学理论与多尺度分析方法, 其结果为具有小周期构造的光学厚介质的传导-辐射耦合热传输问题的多尺度计算提供了理论依据.

本文第一部分给出了 Rosseland 型(抛物)方程的全局适定性分析. 首先, 介绍了数学模型及其物理背景. 这类非线性方程的系数仅在一个温度区间上正定, 并带有混合边值. 其次, 运用极值原理, 给出了线性化方程解的上下界估计和线性化映射的定义域. 最后利用 Griepentrog 建立的线性抛物方程极大正则性理论, 给出了线性化映射的连续性和像集的列紧性. 从而线性化映射存在一个不动点, 解决了解的存在性问题.

第二部分针对这类方程给出了相关的求解算法及其收敛性分析. 首先, 给出了预估-校正方法、Newton 法的分析和解对参数的连续依赖性. 然后针对 Rothe 法给出了单步的预估-校正算法、可解性和整体收敛性.

第三部分讨论具有小周期振荡系数的 Rosseland 型(椭圆)方程的适定性和二阶双尺度分析方法. 首先, 类似于抛物情况, 给出了不动点的存在性; 类似线性情况, 给出了形式上的二阶双尺度展开式. 其次, 利用补偿紧性和第一部分的不动点方法,证明了均匀化方程和辅助函数方程解的存在性. 最后基于 Fusco 和 Moscariello 的分片积分平均方法证明了非线性均匀化的收敛性.

第四部分给出了二阶双尺度展开式的收敛性分析. 首先, 在周期问题全局化的基础上给出了辅助函数的最大模和 HÖlder 模估计. 其次, 在李岩岩-Vogelius 梯度估计的基础上证明了: 如果系数分片光滑, 则辅助函数梯度有界. 最后, 分别在残量方程的 De Giorgi-Nash 估计, Avellaneda-林芳华梯度估计的基础上, 给出了一阶双尺度解的 HÖlder 模和梯度最大模估计. 结果可以部分推广到非线性和抛物型方程情况.