低秩矩阵优化算法与合作博弈解集概念研究

吴乐秦

摘要

随着最优化理论的发展与实际应用的需要, 矩阵优化问题近年来在世界范围内受到了广泛的关注. 而在这类问题中, 最让我们觉得感兴趣的, 是两类有特殊结构的矩阵, 即低秩矩阵与稀疏矩阵. 首先, 挖掘矩阵的特殊性质是求解大规模优化问题的实际需要. 同时, 从对实际问题的观察中, 我们相信这两个特点恰恰反映了我们生活的这个世界深层次的性质. 因此对稀疏与低秩矩阵优化问题的研究与算法设计, 对解决实际问题有巨大的指导意义.

在本文的第二章中, 我们首先研究了矩阵完整化问题, 这是低秩矩阵优化问题中形式最为简单却在算法上仍未完美解决的一个问题. 可以证明它是一个 NP-难问题, 目前已有的处理办法主要有两大类, 即非凸松弛模型与凸松弛模型. 我们在这一章提出的两种算法主要基于后者, 亦即求解核范数极小化问题. 第一种算法致力于求解其对偶问题. 在理论上, 我们证明了投影梯度迭代格式等价于原始问题的增广 Lagrange 乘子迭代格式, 并基于这一点给出了算法的收敛性与迭代过程中的误差估计, 同时建立了对偶最优解与原始最优解间的关系, 给出了直接由对偶问题最优解得到原始问题最优解的公式. 我们给出的第二种算法求解的是交换核范数极小化问题的目标与约束得到的 LASSO 问题. 我们分析了 LASSO 问题中的参数与原问题最优解间的关系, 给出了参数的迭代更新格式, 并基于此提出了全新的 LASSO 迭代算法. 数值实验表明我们的算法是十分有效的.

在本文的第三章中, 我们同时研究了矩阵的低秩与稀疏性质, 即鲁棒主成分分析问题. 我们提出了三类数值算法, 分别为基于原始问题的近似方向算法与增广 Lagrange 乘子算法, 以及基于对偶问题的近似可行方向算法. 在理论上, 我们对于三种算法均证明了收敛性, 并在第三种基于对偶问题的算法中, 指出了如何不增加额外计算量而直接得到原始问题最优解. 数值结果表明, 我们给出的三种算法都是非常有效的.

本文的第四章讨论了合作博弈模型中的解集概念, 并提出了一种新的定义方式. 近年来, 在博弈论理论的研究中, 人们逐渐意识到非合作博弈模型通常会得到一个对于集体利益来说不是最优的解, 合作博弈模型开始受到越来越广泛的关注. 而在合作博弈模型的理论研究中, 最核心的问题即是解

集概念. 在这一章中, 我们提供了一种全新的视角, 通过分析子联盟结构的稳定性, 建立了我们的解集概念. 这个解集概念的思想与当前最流行的两种定义方式截然不同. 它既不同于 Nash 议价模型中的公理化定义方式, 也不像 von Neumann-Morgenstern-方法依赖于特征函数这个不可信的中间变量.