

可积数值算法的若干研究

孙建青

摘要

如何设计高效、稳定的算法,是计算数学领域的一个核心问题. 2006年,日本京都大学的 Nakamura 教授在自己的著作《Functionality of Integrable Systems》中首次提出了“可積分アルゴリズム”的概念,中文译为“可积数值算法”. 这类算法不仅有良好的数值效果,还具备一些特殊的代数、几何性质,即所谓的“可积性”. 可积数值算法的研究不仅促进了可积系统理论的发展,还为计算数学提供了新的思路和方法.

研究可积数值算法有两个基本问题,一是建立某些经典算法和可积系统的联系;二是从已有的可积系统出发构造新的数值算法. 而利用可积系统设计数值算法,已成为计算数学领域的一个研究热点. 本文主要介绍我们在这方面取得的新进展.

(1) 给出了第二类 Bogoyavlensky 格方程的 Lax 表示,并研究了对应 Lax 矩阵的渐近行为. 基于此,我们构造了用于计算一类带状矩阵特征值问题的数值算法,并且讨论了离散方程中参数的选取对算法收敛速度的影响.

(2) Boussinesq 格方程是格的 Gel'fand-Dikii 方程族的第二个成员,可以用来设计收敛加速算法. 本文中,我们给出了 Boussinesq 格方程对应的 q -差分形式和 confluent 形式,并研究了它们的数值应用.

(3) 我们导出了多步 ε -算法的 confluent 形式,并通过研究它的行列式解,得到了一类新的 continuous prediction 算法.

(4) 通过研究一类推广的 Lotka-Volterra 方程,我们得到了一种新的序列变换和收敛加速算法,并给出了相应的收敛性和稳定性分析结果. 理论和数值结果都表明,新得到的算法对一类线性收敛序列和超线性收敛序列有效.

关键词: 可积性, 双线性方法, 特征值, 收敛加速算法, 序列变换