几类分数阶微分方程的数值方法及定性分析

黄健飞

摘 要

近年来，分数阶微积分理论在高能物理、反常扩散、黏弹性材料、系统控制、流变学、地球物理、生物医学工程和经济学等诸多领域获得成功的应用，凸显其不可替代的独特优势。然而，与经典微积分算子不同，分数阶微积分算子具有非局部性，从而许多计算整数阶微分方程十分有效的数值方法对分数阶微分方程可能会完全失效。因此，对分数阶微分方程数值方法研究的重要性和挑战性日益突出。

本文主要针对线性和非线性分数阶常微分方程初值问题、分数阶对流扩散方程初边值问题，构造不同的数值方法进行求解并给出相应的理论分析。

第一章介绍分数阶微积分的历史和研究现状，给出分数阶微积分的基本定义和性质。

第二章基于分数阶导数的 Grünwald-Letnikov 逼近构造有限差分格式。对于线性测试方程，证明显式和隐式 Grünwald-Letnikov 格式的渐近稳定性和绝对稳定性，得到截断误差、传播误差和全局误差的表示和估计。

第三章研究求解非线性分数阶常微分方程初值问题 block-by-block 方法的收敛性。得到了该格式的截断误差估计，通过分析其权系数，证明该格式的高阶收敛性，并讨论解的光滑性对格式收敛阶的影响。

第四章利用 Crank-Nicolson 方法的思想对空间分数阶扩散方程设计一个高阶有限差分-谱方法。给出时间半离散格式的稳定性和收敛性，以及全离散格式在不同范数下的误差估计。证明该格式在时间方向具有 2 阶精度，在空间方向具有谱精度。并提供一个对 Lagrange 插值函数求分数阶导数的技巧。

第五章设计一个谱 Galerkin 方法来求解时间空间分数阶对流扩散方程初边值问题。证明变分问题解的存在唯一性以及谱 Galerkin 方法的收敛性。通过数值算例来检验我们的理论分析结果。

第六章基于与分数阶扩散波动方程等价的偏微分积分方程，我们设计两个求解分数阶扩散波动方程初边值问题的差分格式。在较弱的光滑性假设下，证明这两个格式在时间方向具有一阶精度和在空间方向具有二阶精度。数值实验验证了我们的理论分析结果。