

几何数值积分及其在偏微分方程中的应用

陈耀

摘要

本文研究了几何数值积分及其在偏微分方程中的应用。主要考虑了多辛数值算法在非线性波动方程和带非标准结构的多辛哈密顿系统中的应用，并分别以Sine-Gordon方程和Landau-Lifshitz方程为例进行了数值实验。此外还研究了两种求解Maxwell方程组的分裂格式，这些分裂格式是无条件稳定的。具体研究包括以下几个方面的内容：

1. 通过引入中间变量非线性波动方程可以被描述为多辛哈密顿系统，但是多辛哈密顿形式是不唯一的。在本论文中我们选取了波动方程的四维多辛哈密顿形式，使用两种理论上等价的多辛数值格式进行计算和比较。这两种等价的多辛数值格式一种是多辛box格式，另一种是通过消去中间变量得到的等价多辛数值格式。数值结果表明：等价的数值格式计算效果并不等效。

2. 一些守恒型的偏微分方程具有非标准的多辛结构。通常的多辛数值格式只能应用于具有标准结构的多辛哈密顿系统，对于带非标准结构的多辛哈密顿系统，这些数值格式通常不是多辛的，即不能保持原系统的多辛结构。考虑到守恒型偏微分方程除了具有多辛结构还具有局部和整体守恒律，在物理理论研究和实际应用中，这些局部守恒律起着非常关键的作用。因此构造和研究能够保持原系统局部和整体守恒律的数值格式是重要和有意义的。在本论文中我们通过离散梯度方法，以LLE为例构造和研究了保持系统局部能量和动量的数值方法，并进行了数值实验。

3. 自1966年Yee格式出现以来，时域有限差分方法(FDTD)逐渐成为一类重要的求解Maxwell方程组的数值方法，在实际的工业应用中有着广泛的应用。针对Yee格式受稳定性条件限制的情况，众多学者研究和构造了许多无条件稳定的FDTD格式，推动和加速了FDTD方法的发展与应用。在本论文中基于Yee格点空间离散我们考虑了几种分裂方式，并对Maxwell方程组的均匀介质和非均匀介质情形进行了数值实验。

关键词：多辛哈密顿系统，局部守恒律，保能量格式，Maxwell方程，时域有限差分分裂格式