

# 图像重构的数值方法及其理论分析

陈冲

## 摘要

图像重构是当前断层成像领域最重要的研究问题之一。本文的主要工作是针对基于 X 射线计算机断层成像和基于冷冻电镜三维成像的图像重构问题进行研究,其中涉及到模型建立、算法设计、收敛性分析和数值实验等方面,具体内容可分为以下四部分。

1. 我们提出了基于无穷投影角度图像重构的变分模型,并且对该模型的正则化项进行了理论分析。该模型的优点在于一方面对其变分之后可利用快速傅里叶变换进行数值计算,从而大大提高计算效率,另一方面其正则化项具有保持图像几何特征的性质。数值结果表明该模型确实能保持重构图像的几何特征,具有比较理想的重构效果。

2. 针对上述变分模型,我们提出了基于梯度流的半隐式有限元方法。在数值上,我们的方法对许多投影数据的重构问题均适用,特别适用于受噪声影响来源于均匀稀疏投影角度的和随机分布投影角度的探测数据等具有挑战性的图像重构问题。在理论上,我们给出了该方法完备的收敛性结果,不仅严格地证明了当梯度流的解存在唯一的情况下,半隐式有限元离散的解能收敛到梯度流的解,而且还证明了当随时间演化到无穷大的时候,该解能达到稳定状态并且逼近于相应的 Euler-Lagrange 方程的解。值得注意的是,其收敛性不依赖于时间步长和正则化参数的选取。数值实验表明,对上述图像重构问题我们的方法产生了高质量的重构图像。数值比较的结果显示我们重构方法的效果要好于其它一些经典的和最新的重构方法的效果。

3. 我们对基于梯度流的显式有限元方法的收敛性进行了分析。该方法已被很好地用来求解从二维投影图像重构三维密度图像的基于有限投影角度重构的变分模型。在分别使用两种不同正则化项的情况下,我们证明了由该方法产生的序列必定收敛到该变分模型在有限元空间中的全局最优解,并且对收敛点与初始点的位置关系进行了理论分析。我们还进一步证明了该方法是稳定和有效的。

4. 针对基于有限投影角度图像重构的变分模型,我们提出了基于梯度流的半隐式有限元方法和混合格式有限元方法。混合格式利用显式格式和半隐式格式的线性组合,结合了两者的优点,在每步迭代的计算量上相对半隐式格式更少,在收敛速度上相对显式格式更快,并且时间步长更易控制。我们还给出了半隐式格式和混合格式有限元方法的收敛性证明。数值结果表明混合格式有限元方法是数值收敛的,并且比显式的和半隐式的格式更有效。

**关键词:** 图像重构, 变分模型, 梯度流, 有限元方法, 收敛性分析